

## Задание 4

26.03.2017

**FL 15** Докажите нерегулярность следующих языков:

- a)  $\{0^n \mid n \text{ — полный квадрат}\}$
- b)  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ — двоичное представление простого числа}\}$

**FL 17** Будем писать  $L_1 \ll L_2$ , если  $L_1 \subset L_2$  и  $|L_2 \setminus L_1| = \infty$ . Докажите, что если  $L_1, L_2$  — регулярные и  $L_1 \ll L_2$ , то существует такой регулярный язык  $L_3$ , что  $L_1 \ll L_3 \ll L_2$ .

**FL 19** Приведите регулярные выражения для следующих языков:

- Множество слов из 0 и 1, в которых каждая пара смежных 0 находится перед парой смежных 1.
- Множество слов из 0 и 1, в которых число 0 делится на 3, а число 1 чётно.

**Определение.** *КС-грамматика (контекстно-свободная грамматика, context-free grammar, cf-grammar)*

$G$  — это четвёрка  $(\Sigma, N, R, S)$  такая, что:

- $\Sigma$  — конечный алфавит, его элементы мы назовём терминальными символами, или терминалами.
- $N$  — некоторое конечное множество, причём  $N \cap \Sigma = \emptyset$ . Его элементы мы называем нетерминальными символами, или нетерминалами.
- $S \in N$  — стартовый символ.
- $R$  — конечное множество правил вывода вида  $A \rightarrow \alpha, A \in N, \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ ,  $R$  — конечное подмножество  $2^{N \times (N \cup \Sigma)^*}$ .

Языком  $L(G)$ , распознаваемым (или генерируемым) грамматикой  $G$ , будем называть множество строк из  $\Sigma^*$ , которые можно вывести из  $S$  по правилам вывода из  $R$ .

**Пример.** Язык Дика, или язык всех правильных скобочных последовательностей, распознаётся грамматикой  $G = (\Sigma, N, R, S)$ , где  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $N = \{S\}$ ,  $R = \{S \rightarrow aSb, S \rightarrow SS, S \rightarrow \varepsilon\} = \{S \rightarrow aSb \mid SS \mid \varepsilon\}$  (почему это верно?)

**FL 20** Докажите, что следующие языки являются контекстно-свободными:

- a)  $\{a^n b^{n+m} a^m \mid n, m \geq 0\}$
- b)  $\{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$
- c)  $\bar{L}$ , где  $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**FL 21** Докажите, что класс контекстно-свободных языков замкнут относительно операций:

- a) Объединения с контекстно-свободными и пересечения с регулярными языками.
- b)  $SUFFIX(L) = \{v \mid \exists u : uv \in L\}$ .
- c)  $h(L)$ , где  $h : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  — произвольный гомоморфизм.
- d)  $SHIFT(L)$ .

**FL 22** Докажите, что если  $L_1$  и  $L_2$  — регулярные языки, то  $L_3 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2, |u| = |v|\}$  контекстно-свободный.

**FL 23** Докажите, что замыкание Клини унарного языка (то есть языка над алфавитом из одного символа) является регулярным языком.