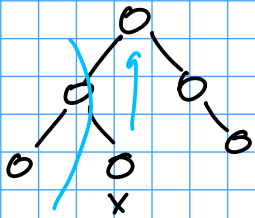
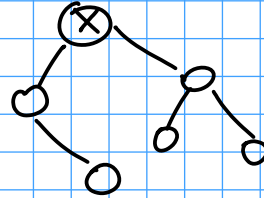


Splay - дерево

$Splay(x)$ - перестраивает дерево так, чтобы x стала корнем.



$Splay(x)$



Лемма 1. Стоимость операции $Splay$ \sim высоте дерева. $O(h)$

Лемма 2. \exists такая p -ная потенциальная $\Phi(T)$, опред. для деревьев

$$\begin{aligned} C'(R) &= C(R) + \Delta\Phi \\ C(R) &= C'(R) - \Delta\Phi \end{aligned}$$

а) $\Phi(T) = O(n \log n)$

б) узнатая стоимость $Splay()$ отн. $\Phi(T) = O(\log n)$

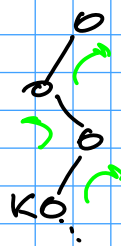
$\exists m \gg n$, если мы сделаем m операций над деревом ($Splay()$), то это займет

$$O(\underbrace{m \log n}_{m \times \log n} + \underbrace{n \log n}_{\text{max. уменьшение потенциала}}) = O(m \log n)$$

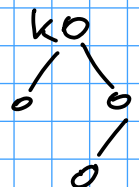
Search(k):

Находим k

$Splay("k")$



\rightarrow



Insert(k):

Находим место для k

$Splay("k")$

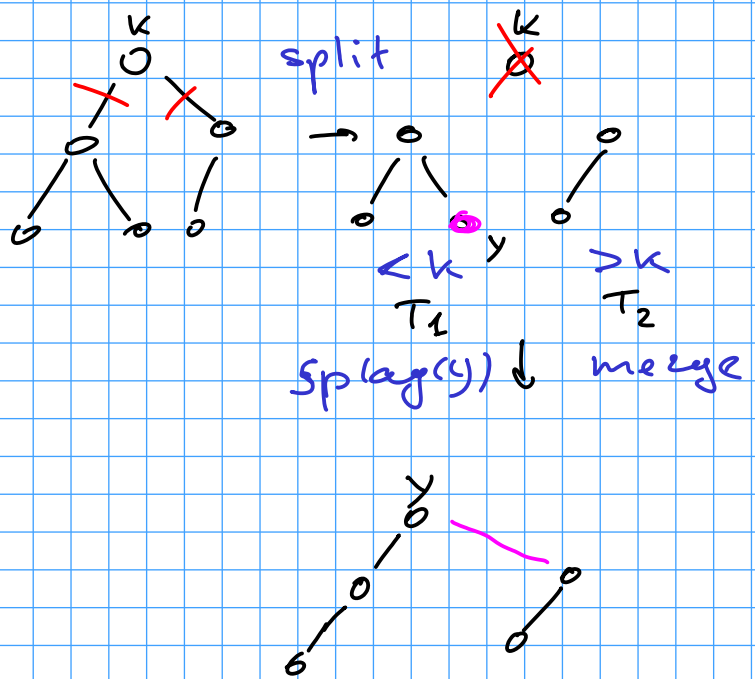
Erase (k):

Search (k)

Split (k)

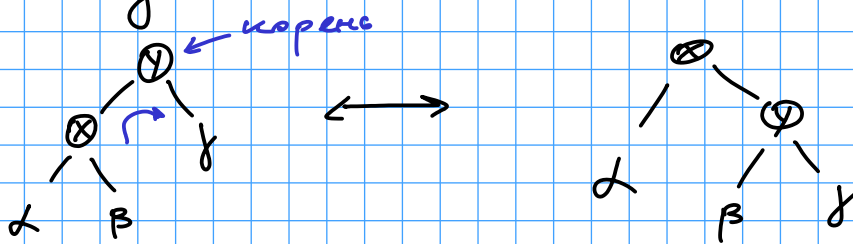
Splay (max(T₁))

Merge (T₁, T₂)

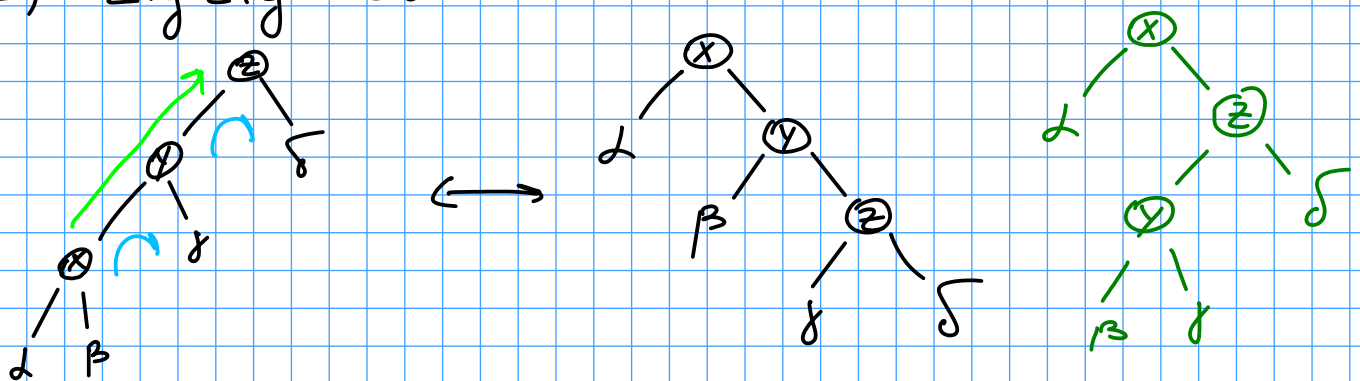


Splay (x)

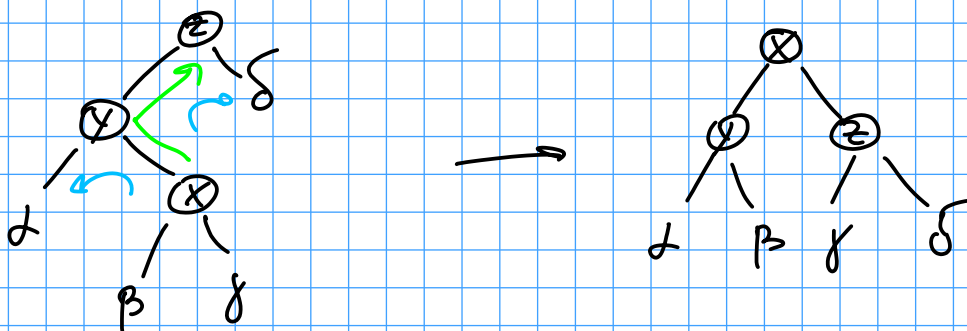
1) Zig mat



2) Zig zig mat



3) Zig zag mat



Следствие:

Лемма 1 доказана.

Лемма 2:

$\lceil \omega(x) \rceil := \#$ вершин в поддереве с корнем в x

$$\Phi(x) := \lceil \log_2 \omega(x) \rceil = O(\log n)$$

$$\Phi(T) := \sum_{x \in T} \Phi(x) = O(n \log n)$$

УТВ: Угловая стоимость Splay

$$C' \leq 3 \left(\overset{O(\log n)}{\Phi_0(z)} - \overset{O(\log n)}{\Phi_0(x)} \right) + 1 \quad \Phi_0 - \text{до Splay}$$

↑
корень

NB: Потенциал корня не меняется

$$C = O(\log n)$$

УТВ: zig шаг Splay имеет уг. ст.

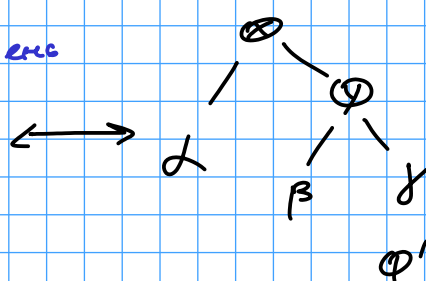
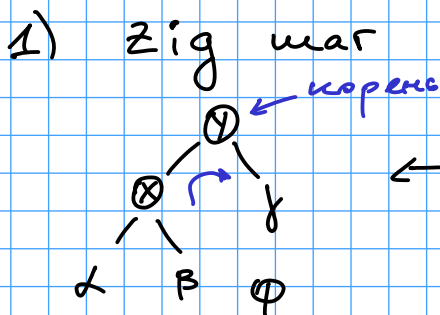
$$\leq \underline{\underline{3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1}} \quad \Phi' - \text{после шага}$$

zigzig ~ zigzag

$$\leq \underline{\underline{3(\Phi'(x) - \Phi(x))}}$$

Если просуммировать стоимость всех шагов,

то получим $C' \leq 3(\Phi_0(z) - \Phi_0(x)) + 1$

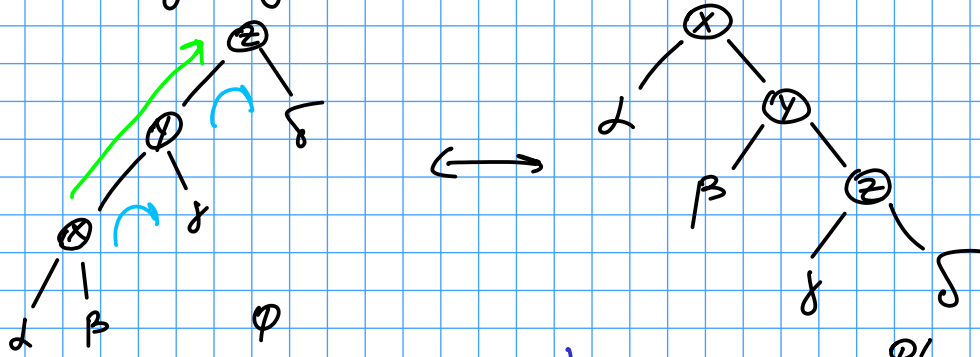


$$\Delta \Phi = \cancel{\Phi'(x)} + \Phi'(y) - \Phi(x) - \cancel{\Phi(y)} \leq \Phi'(x) - \Phi(x)$$

Учётная стоимость zig мар:

$$C'(zig) = \underbrace{\Phi'(x) - \Phi(x)}_{\Delta \Phi} + 1 \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1$$

2) zig zig мар



$$\Delta \Phi = \cancel{\Phi'(x)} + \overset{\leq \Phi'(x)}{\Phi'(y)} + \overset{\leq \Phi'(x)}{\Phi'(z)} - \Phi(x) - \overset{\geq \Phi(x)}{\Phi(y)} - \cancel{\Phi(z)} \leq 2(\Phi'(x) - \Phi(x))$$

// сумма загов

$$C'(zigzig) = \Delta \Phi + 1 \leq 2(\Phi'(x) - \Phi(x)) + 1 \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$$

? $\Phi'(x) - \Phi(x) \geq 1$ //

$\mathcal{G} \rightarrow$

$$\begin{cases} \Phi'(y) = \Phi'(x) = \Phi'(z) \\ \Phi(x) = \Phi(y) \\ \Phi'(x) = \Phi(x) \end{cases} \Rightarrow \text{все } \Phi'(\cdot) = \Phi(\cdot)$$

$$\exists \Phi(x) = \Phi'(x) = \dots = \Phi'(z) = k$$

$\exists \omega'$ и ω - соответствующие φ -м

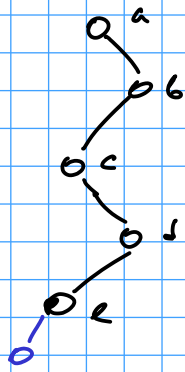
2^{k+1} $\omega'(x) \geq 2^k$

$$\begin{aligned} \omega'(x) &= \omega'(alpha) + \omega'(beta) + \omega'(y) + \omega'(delta) + 3 = \\ &= (\underbrace{\omega(alpha) + \omega(beta) + 1}_{=\omega(x)}) + (\underbrace{\omega'(y) + \omega'(delta) + 1}_{=\omega'(z)}) + 1 \geq \end{aligned}$$

$$\geq \underline{2^k + 2^k + 1} > 2^{k+1}$$

Замечание 1:

Insert уменьшает $\Phi(T)$ на $O(\log n)$



$$w'(a) = w(a) + 1 = n$$

$$w'(b) = w(b) + 1$$

\vdots

$$w'(e) = w(e) + 1$$

$$\Phi(x) = \lfloor \log_2 w(x) \rfloor$$

$$\Delta \Phi(T) \leq \#(\text{сечен. узлов} < n) = O(\log n)$$

Замечание 2:

Erase уменьшает $\Phi(T)$ на $O(\log n)$

Split : $-O(\log n)$

Merge : $+O(\log n)$

$O(\log n)$