12 октября 2017

Количество баллов на зачет: *9*

1. *(1.5 балла)* Доказать, что последовательность

$$(n, n, n-1, n-1, \dots, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

   всегда является графовой.

2. *(2 балла)* Пусть G есть граф с обхватом $g(G) \geq 5$ и минимальной степенью вершины $\delta \geq k$. Доказать, что в таком графе по меньшей мере k^2+1 вершин. Для случая $k = 2$ предъявить граф, имеющий в точности k^2+1 (определения).

3. *(1.5 балла)* Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство

$$|\mathrm{outdeg}(x) - \mathrm{indeg}(x)| \leq 1.$$

   Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить сбалансированный орграф D.

4. *(1.5 балла)* Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

5. *(2 балла)* Пусть G есть простой граф, диаметр которого $\mathrm{diam}(G) \geq 3$. Доказать, что его дополнение $\bar{G}$ имеет диаметр $\mathrm{diam}(\bar{G}) \leq 3$

6. *(1.5 балл)* Доказать, что в связном графе два максимальных простых пути имеют общую вершину.

7. *(2.5 балла)* Доказать, что простой граф G, построенный на 10 вершинах и имеющий 28 ребер, содержит цикл длины 4.

8. *(1.5 балла)* Неубывающая последовательность чисел

$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \dots, s_n): \qquad s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq n-1 \tag{1}$$

   называется последовательностью количества очков (score sequence), если существует турнир T, построенный на n вершинах, для которого $\mathrm{outdeg}(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Доказать, что невозрастающая последовательность (1) является последовательностью количества очков тогда и только тогда, когда последовательностью количества очков оказывается последовательность $\mathbf{s_2}$, полученная из последовательности

$$(s_1, s_2, \dots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \dots, s_{n-1} - 1)$$

   переупорядочиванием ее членов в порядке неубывания.

9. *(0.5 балла)* Доказать, что для любой последовательности (1) количества очков справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geq \binom{k}{2}, \qquad k = 1, 2, \dots, n-1; \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}. \tag{2}$$

10. *(2.5 балла)* Доказать, что условия (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы неубывающая последовательность (1) была последовательностью количества очков.