# Теория категорий

## Функторы и естественные преобразования

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

# План лекции

Функторы

- Определение
- (Ко)пределы
- Изоморфизм категорий

Подкатегории

Естественные преобразования

# Определение функторов

- Функторы между категориями **C** и **D** – это морфизмы категорий.
- Функтор $F$ состоит из функции $F : Ob(\mathbf{C}) \to Ob(\mathbf{D})$ и функций $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ для всех $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$.
- Эти функции должны сохранять тождественные морфизмы и композиции:

$$F(id_X) = id_{F(X)}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

# Забывающие функторы

- Забывающий функтор $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющий каждой группе множество ее элементов.
- Для других алгебраических структур тоже существуют забывающие функторы $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$, $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$, и так далее.
- Можно задавать функторы, которые забывают не всю информацию.
- Например, существует два забывающих функтора $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}$ и $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$.

# Примеры функторов

- Функторы между категориями предпорядков – это в точности монотонные функции.
- Если $M$ и $N$ – пара моноидов, и $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – категории на одном объекте, соотетствующие этим моноидам, то функторы между $\mathbf{C}_M$ и $\mathbf{C}_N$ – это в точности гомоморфизмы моноидов $M$ и $N$.
- Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория и $A$ – объект $\mathbf{C}$, тогда $A \times - : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – функтор, сопоставляющий каждому объекту $B$ объект $A \times B$ и каждому морфизму $f : B \to B'$ морфизм $id_A \times f : A \times B \to A \times B'$.
- "Существует" очевидный функтор $I : \mathbf{Hask}_{total} \to \mathbf{Set}$.
- "Функторам" в хаскелле соответствуют функторы $\mathbf{Hask} \to \mathbf{Hask}$.

# Функторы и дуальность

- Каждому функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ можно сопоставить функтор $F^{op} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- Другими словами существует биекция между множествами функторов $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}^{op}$.
- С другой стороны, функторы вида $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ никак не связаны с функторами вида $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Первые называютс контравариантными функторами, а вторые – ковариантными.

## Пределы и копределы функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ можно определить понятие предела $lim\ F$ и копредела $colim\ F$. Определение такое же как и для диаграмм.
- Категории $\mathbf{J}$ можно рассматривать как обобщение графов, а функтор $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ – как обощение диаграмм в $\mathbf{C}$.
- Любой диаграмме можно сопоставить функтор, и наоборот. (Эти конструкции не взаимообратные)
- Но пределы и копределы соответствующих диаграмм и функторов будут совпадать.
- Функторы $F : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ тоже называют диаграммами.

# Индуктивные типы данных

- Допустим мы хотим описать объект в произвольной категории, являющийся аналогом какой-либо структуры данных (списки, деревья, и так далее).
- В теории множеств они строятся индуктивно, то есть мы сначала определяем, скажем, множества $L_n(A)$ списков длины не больше $n$, а потом говорим, что множество всех списков – это объединение множеств конечных списков $L(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n(A)$.
- В теории категорий можно сделать аналогичную конструкцию.
- Во-первых, определим объект $L_n(A)$ списков длины не больше $n$ следующим образом:

$$1 + A + A^2 + \ldots + A^n$$

# Примеры бесконечных (ко)пределов

- Теперь мы можем определить объект $L$ как следующий копредел:
$$L_0 \to L_1 \to L_2 \to \dots$$
- Рассмотрим вместо копредела следующий предел:
$$\dots \to L_2 \to L_1 \to L_0$$
где функция $L_{n+1} \to L_n$ сопоставляет каждому списку $[x_1, \dots x_{n+1}]$ список $[x_2, \dots x_{n+1}]$, а остальные списки не меняет.
- Тогда предел этой последовательности – это множество (потенциально) бесконечных списков.

# Общее определение индуктивных типов данных

- Любой (ко)индуктивный тип данных можно задать в виде функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.
- Функтор, соответствующий, спискам определяется как $L_A(X) = 1 + A \times X$.
- Функтор, соответствующий, бинарным деревьям определяется как $T_A(X) = 1 + A \times X \times X$.
- Для любого такого функтора можно определить объекты $D_n = F^n(0)$.
- Тогда существуют очевидные морфизмы $D_n \to D_{n+1}$.
- Теперь мы можем определить объект $D$, соответствующий функтору $F$ как копредел

$$D_0 \to D_1 \to D_2 \to \ldots$$

# Общее определение коиндуктивных типов данных

- Дуальным образом мы можем определить коиндуктивный тип данных, соответствующий функтору $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ как предел

$$\ldots \to F^n(1) \to \ldots \to F^2(1) \to F(1) \to 1$$

- Разница между индуктивными и коиндуктивными типами данных не очень большая: индуктивные структуры всегда конечны, а коиндуктивные могут быть бесконечны.
- Так в агде используются индуктивные типы данных, а в хаскелле коиндуктивные.

# Изоморфные категории

- Для любой категории $\mathbf{C}$ существует тождественный функтор $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, отправляющий каждый объект и морфизм в себя.
- Если $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ и $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$, то функтор $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ определяется на объектах и на морфизмах как композиция $F$ и $G$.
- Композиция функторов – ассоциативна, тождественный функтор является единицей для композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *изоморфизмом* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ такой, что $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

# Злые понятия

- Как правило, имея две группы, не имеет смысла спрашивать равны ли они; нужно спрашивать об их изоморфности.
- Это верно для объектов в любой категории.
- Любое понятие, которое говорит о равенстве объектов некоторой категории, называют *злым*.
- Изоморфизм категорий – злое понятие.

# План лекции

Функторы

- Определение
- (Ко)пределы
- Изоморфизм категорий

Подкатегории

Естественные преобразования

## Подкатегории

- *Подкатегория* $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ – это подкласс объектов $\mathbf{C}$ и для каждой пары объектов $X, Y$ в $\mathbf{C}'$ подкласс множества $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что $\mathbf{C}'$ содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *строгим* (*faithful*), если для любых $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ функция $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.
- Подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.
- Проблема этого определения заключается в том, что оно не стабильно относительно изоморфизмов объектов $\mathbf{C}$ (то есть, $X$ может принадлежать $\mathbf{C}'$, а изоморфный ему объект $Y$ – нет).

## Полные подкатегории

- Подкатегория $\mathbf{C}'$ категории $\mathbf{C}$ называется *полной*, если для любых объектов $X, Y$ в $\mathbf{C}'$ множества $Hom_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in Ob(\mathbf{C})$ функция $F : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- Полные подкатегории категории $\mathbf{C}$ – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- Теперь необязательно требовать инъективность на объектах.
- Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

# Примеры

- $\mathbf{Set}_{fin}$ – полная подкатегория $\mathbf{Set}$.
- $\mathbf{Ab}$ – полная подкатегория $\mathbf{Grp}$.
- “Существует” не полное вложение $\mathbf{Hask}_{total}$ в $\mathbf{Set}$.
- Все забывающий функторы, которые мы рассматривали, являются строгими.
- Обратное тоже верно: любой строгий функтор является в некотором смысле забывающим.

# План лекции

Функторы

Определение

(Ко)пределы

Изоморфизм категорий

Подкатегории

Естественные преобразования

# Определение

- Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- *Естественное преобразование* $\alpha : F \to G$ – это функция, сопоставляющая каждому объекту $X$ из $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$, удовлетворяющая условию, что для любого морфизма $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ следующий квадрат коммутирует:

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}
$$

# Категория функторов

- Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- Если $\alpha : F \to G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \to Y$ в $\mathbf{C}$ можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \to G(Y)$ в $\mathbf{D}$.
- Морфизм $\alpha_f$ определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_Y$, что равно $\alpha_X \circ G(f)$ по естественности.
- Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

# Композиция естественных преобразований

- Если $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \to H$ как функцию, сопоставляющую каждому $X$ из $\mathbf{C}$ морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \to H(X)$.
- Композиция $\beta \circ \alpha$ – естественна:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"'] & H(Y)
\end{tikzcd}$$

# Категория функторов

- Для любого функтора $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому $X$ тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$.
- Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- Таким образом, для любой пары категорий $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ существует категория функторов, которая обозначается $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

## Эквивалентность категорий

- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ называются *эквивалентностью категорий*, если существует функтор $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- Категории $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.
- Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- Функтор $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- Последнее условие означает, что для любого объекта $X$ в $\mathbf{D}$ существует объект $Y$ в $\mathbf{C}$, такой что $F(Y)$ изоморфен $X$.

# Пример

- Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \to \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указаным выше способом.
- Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство $V$ изоморфно пространству $\mathbb{R}^{dim(V)}$.
- Таким образом, $F$ – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

# Доказательство

## Proposition

*Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.*

## Доказательство.

Пусть $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Пусть $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ – обратный к нему, $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Тогда $F$ – существенно сюръективен на объектах.
Действительно, для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ возьмём $Y = G(X)$, тогда $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$.
Покажем, что $F$ – строгий. Пусть $F(f) = F(f')$ для некоторых $f, f' : X \to Y$. Тогда по естественности $\alpha$ получается, что $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$. Аналогично доказывается, что $G$ – строгий.

# Доказательство (продолжение)

Докажем, что $F$ – полный. Пусть $h : F(X) \to F(Y)$ – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку $f : X \to Y$ как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$. С другой стороны, по естественности $\alpha$ у нас есть равенство $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$. Следовательно $G(h) = G(F(f))$. По строгости $G$ мы получаем, что $h = F(f)$. Таким образом, $f$ – прообраз $h$, то есть $F$ – полный.

# Доказательство (в обратную сторону)

Пусть $F$ – полный, строгий и существенно сюръективен на объектах. Тогда для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ существует объект $Y \in Ob(\mathbf{C})$ и изоморфизм $\alpha_X : F(Y) \simeq X$. Определим $G : Ob(\mathbf{D}) \to Ob(\mathbf{C})$ как функцию, возвращающую на каждом $X$ такой $Y$ (не важно какой конкретно).

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, dashed, "F(f')"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Так как $F$ полон, то для каждого $f : X \to Y$ существует $f' : G(X) \to G(Y)$, такая что $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$. Так как $F$ строг, то такая стрелка уникальна. Пусть $G(f) = f'$. Используя уникальность, легко проверить, что $G$ сохраняет тождественные морфизмы и композиции.

# Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что $G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$.
Преобразование $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$ естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности $\alpha$.
Так как $F$ – полный, то для любой стрелки $\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \to F(Y)$ существует прообраз $\beta_Y : G(F(Y)) \to Y$. Все $\beta_Y$ – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы $\alpha^{-1}_{F(Y)} : F(Y) \to F(G(F(Y)))$.

# Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что $\beta$ естественен.

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(F(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\
G(F(Y)) \arrow[r, "\beta_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Применив $F$ к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как $\alpha$ естественен. Но так как $F$ – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.