1 Домашнее задание на 21 ноября

1. Пусть n - натуральное число, $r, s \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $r|s$ и $s|r$; докажите, что существует такой обратимый элемент x кольца $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, что $r = sx$.
2. Докажите, что пересечение всех простых идеалов коммутативного ассоциативного кольца с единицей совпадает с нильрадикалом ($\sqrt{0} = \{r \in R | \exists n : r^n = 0\}$).
3. Пусть R — кольцо непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, $I_c = \{f \in R | f(c) = 0\}$ ($c \in [0, 1]$). Докажите, что
   (a) I_c — максимальный идеал в R.
   (b) * всякий максимальный идеал кольца R совпадает с I_c для некоторого c.
4. Покажите, что $\mathbb{Z}[x]$ не является кольцом главных идеалов.