1 Домашнее задание на 14 ноября

1. Пусть A — коммутативное кольцо с 1 I, J — идеалы в A. Положим $\sqrt{I} := \{a \in A | \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$.
   (a) Верно ли, что $\sqrt{I}$ — идеал A?
   (b) Верно ли, что $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$?
2. Докажите, что произведение всех решений сравнения $x^2 - 1 \equiv 0 \mod n$ сравнимо с 1 по модулю n, если число решений не равно 2, и сравнимо с -1, если число решений равно 2.
3. Докажите, что для любого нечетного простого числа p числитель числа $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$ делится на p.
4. Докажите, что
   (a) в кольце $\mathbb{Z}[i]$ либо $a + bi \equiv 0 \mod 1 + i$ либо $a + bi \equiv 1 \mod 1 + i$.
   (b) в кольце $\mathbb{Z}[\omega] | \omega^2 + \omega + 1 = 0$ либо $a + b\omega \equiv 0 \mod 1 - \omega$ либо $a + bi \equiv \pm 1 \mod 1 - \omega$.