Математическая логика и теория вычислимости Лекция 10. Секвенциальное исчисление предикатов

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

17.05.2018

План лекции

1. Элиминация кванторов
2. Поиск контрпримера для формул с кванторами
3. Секвенциальное исчисление предикатов

План лекции

1. Элиминация кванторов
2. Поиск контрпримера для формул с кванторами
3. Секвенциальное исчисление предикатов

- Мы умеем доказывать невыразимость предиката (в заданных сигнатуре и интерпретации), показывая его неустойчивость относительно некоторого автоморфизма.
- Но, например, весьма бедная пара из сигнатуры $(0^0, S^1, =^2)$ и нормальной интерпретации с носителем $\mathbb{Z}$, $[0] = 0$ и $[S] = \lambda x.x + 1$ не имеет ни одного автоморфизма. Почему $x \mapsto x + 1$ не подходит?
- Более общий способ:
  - предъявить класс предикатов;
  - индуктивно доказать что он содержит все выразимые;
  - показать, что наш предикат не содержится в этом классе.
- Сконструируем такой класс для приведенного примера (это будут предикаты, выразимые бескванторными формулами).

Сведение к бескванторным формулам

- Две формулы A и B данной сигнатуры назовем *эквивалентными* в данной интерпретации (нотация $A \sim B$), если они выражают один и тот же предикат.
- **Утверждение.** Для любой формулы рассматриваемой сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.** (Индукция по длине формулы.) Формула $\forall x \varphi$ эквивалентна $\neg \exists x \neg \varphi$, поэтому единственный живой случай — когда формула имеет вид

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$$

где (по IH) φ — бескванторная, то есть сконструированная пропозициональными связками из атомарных формул вида

$$S(S(\dots(S(u))\dots)) = S(S(\dots(S(v))\dots))$$

Сведение к бескванторным формулам (2)

Атомарные формулы

$$S(S(\ldots(S(u))\ldots)) = S(S(\ldots(S(v))\ldots))$$

могут иметь вид (1) $x = x + c$ (меняем на истину при $c = 0$, на ложь в остальных случаях), (2) $x = c$, (3) $x + c = 0$, (4) $x = x_i + c$, (5) $x + c = x_i$.
Иначе говоря, все атомарные формулы можно записать в виде $x = t_i$, где t_i либо целая константа C_i, либо $x_j + C_i$ (C_i может быть и меньше нуля!). Построим

$$\psi' = \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_n) \vee \varphi(t_2, x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee \varphi(t_k, x_1, \ldots, x_n)$$
$$\psi'' = \varphi[(x = t_1) := F][(x = t_2) := F]\ldots[(x = t_k) := F]$$

$$\psi = \exists x \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$$
$$\psi \sim \psi' \vee \psi'' \qquad \blacksquare$$

Невыразимость отношения порядка

- Отношения порядка $x < y$ невыразимо в наших сигнатуре и интерпретации.
- Действительно, кванторы допускают элиминацию, а все атомарные формулы имеют вид $x = y + C$.
- Но формулы такого типа не различают ситуации $x \gg y$ и $x \ll y$.

Расширение сигнатуры

- Рассмотрим расширенную сигнатуру $(0^0, S^1, =^2, <^2)$ и ее нормальную интерпретацию с носителем $\mathbb{Z}$, $[0] = 0$, $[S] = \lambda x.x + 1$ и $[<] =<$.
- **Утверждение.** Для любой формулы расширенной сигнатуры в рассматриваемой интерпретации имеется эквивалентная ей бескванторная формула.
- **Доказательство.**
  - Теперь атомарных формул больше, помимо $x = t_i$ у нас будут $x < t_i$ и $t_i < x$.
  - Вместо ψ'' нам нужно попробовать числа изо всех промежутков, на которые $\{t_i\}$ разбивает $\mathbb{Z}$
  - Подойдет такая конструкция

$$\begin{array}{lcl}
\psi' & = & \varphi(t_1, x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee \varphi(t_k, x_1, \ldots, x_n) \\
\psi'' & = & \varphi(t_1 - 1, x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee \varphi(t_k - 1, x_1, \ldots, x_n) \\
\psi''' & = & \varphi(t_1 + 1, x_1, \ldots, x_n) \vee \ldots \vee \varphi(t_k + 1, x_1, \ldots, x_n)
\end{array}$$

$$\psi \quad \sim \quad \psi' \vee \psi'' \vee \psi''' \qquad \blacksquare$$

План лекции

1. Элиминация кванторов
2. Поиск контрпримера для формул с кванторами
3. Секвенциальное исчисление предикатов

Что такое контрпример в ИП?

- Формула ИП φ общезначима тогда и только тогда, когда не существует интерпретации и оценки, в которых φ является ложной.
- Значит *контрпримером* к формуле ИП должна служить пара из интерпретации и оценки π в этой интерпретации, в которых φ ложна.
- Поиск контрпримера осуществляется, как и прежде, разбором формулы: то, что должно быть истинным записываем слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.
- Разбор пропозициональных связок проводится точно так же, как в исчислении высказываний.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x (P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \to \forall x(P(x) \vee Q(y))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \lor Q(y) \to \forall x (P(x) \lor Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)} \qquad Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash P(x_1) \lor Q(y)}}{\exists x P(x) \lor Q(y) \vdash \forall x (P(x) \lor Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \lor Q(y) \to \forall x (P(x) \lor Q(y))}$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $\exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(y))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x_2) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vdash P(x_1), Q(y)} \qquad Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1), Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash P(x_1) \vee Q(y)}}{\exists x P(x) \vee Q(y) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(y))}}{\vdash \exists x P(x) \vee Q(y) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(y))}$$

- Справа контрпримера нет: $Q(y)$ одновременно должно быть истинным и ложным в искомой интерпретации.
- Слева — есть. Носитель $D = \{x_1, x_2, y\}$; интерпретация: $[P(x_2)] = T$, $[P(x_1)] = F$, $[Q(y)] = F$; оценка $\pi(z) = z$ для любой переменной z.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \lor Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\overline{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \lor Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \lor Q(x))}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.

Поиск контрпримера

Будем разбирать формулу $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

- τ_1 маркирует произвольный терм, который мы потом можем конкретизировать удобным нам образом.
- Контрпримера нет: возьмем $\tau_1 = f(y)$.

План лекции

1. Элиминация кванторов
2. Поиск контрпримера для формул с кванторами
3. Секвенциальное исчисление предикатов

Структурные правила и аксиома

Как и в ИВ, секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ представляет собой два упорядоченных набора формул (возможно пустых), разделенных запятыми.

Аксиома (схема):

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A, \Delta}$$

Правила сокращения (contraction):

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta}\ (C \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\vdash C)$$

Правила перестановки (permutation):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta}\ (P \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta}\ (\vdash P)$$

Правила введения пропозициональных связок

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \; (\wedge \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \; (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \; (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \; (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \; (\to \vdash) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \; (\vdash \to)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \; (\neg \vdash) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \; (\vdash \neg)$$

Правила введения для квантора существования

- *Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент*:

$$\frac{A_1, \Gamma \vdash \Delta \qquad A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \vee A_2, \Gamma \vdash \Delta}\ (\vee \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1, A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \vee A_2, \Delta}\ (\vdash \vee)$$

- *Правило введения* $\exists$ *в антецедент*:

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists \vdash)$$

Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ.

- *Правило введения* $\exists$ *в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta}\ (\vdash \exists)$$

- От всех подстановок требуется корректность.

Пример деревьев для $Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))$

Вспомним дерево поиска контрпримера

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1), Q(\tau_1)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x)), P(\tau_1) \vee Q(\tau_1)}}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}$$

Мы не нашли контрпримера, но нашли вывод, взяв $\tau_1 = f(y)$. *Дерево вывода* получается такой заменой и отбрасыванием ненужных здесь применений правила сокращения:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(f(y)) \vdash P(f(y)), Q(f(y))}{Q(f(y)) \vdash P(f(y)) \vee Q(f(y))}(\vdash \vee)}{Q(f(y)) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))}(\vdash \exists)}{\vdash Q(f(y)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x))}(\vdash \to)$$

Правила введения для квантора всеобщности

- *Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент*:

$$\frac{A_1, A_2, \Gamma \vdash \Delta}{A_1 \land A_2, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\land \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1, \Delta \qquad \Gamma \vdash A_2, \Delta}{\Gamma \vdash A_1 \land A_2, \Delta} \quad (\vdash \land)$$

- *Правило введения* $\forall$ *в антецедент*:

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\forall \vdash)$$

- *Правило введения* $\forall$ *в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} \quad (\vdash \forall)$$

  Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ.

- От всех подстановок требуется корректность.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash\to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\dfrac{}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы $\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\cfrac{\cfrac{}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
$\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\forall x P(x) \vdash P(y)}\,(\forall \vdash)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}\,(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}\,(\vdash \to)$$

Пример

Построим вывод для безусловно верной формулы
$\forall x P(x) \to \forall x P(x)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(\tau_1) \vdash P(y)}{P(\tau_1) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\forall \vdash)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Для дерева вывода возьмем $\tau_1 = y$.
Другой порядок сразу даст дерево вывода

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(y) \vdash P(y)}{\forall x P(x) \vdash P(y)}(\forall \vdash)}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}(\vdash \forall)}{\vdash \forall x P(x) \to \forall x P(x)}(\vdash \to)$$

Ясно, что за τ надо сразу брать y.

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\cfrac{\cfrac{}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\ (\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\ (\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash\forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall x(P(x) \to P(f(x))), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \qquad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}\,(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}\,(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P(\tau_1) \to P(f(\tau_1)), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall \vdash)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}\,(\forall}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}$$

Выводима ли эта формула?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(y) \vdash P(\tau), P(f(f(y))) \quad P(y), P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}{P(y), P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(f(f(y)))}(\to\vdash)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash P(y) \to P(f(f(y)))}(\vdash\to)}{P(\tau) \to P(f(\tau)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\vdash \forall)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall$$

Ничего не выходит: одновременно нельзя $\tau := y$ и $\tau := f(y)$.
Выход есть: контрприменить правило сокращения (contraction) и дальше получить два разных τ_1 и τ_2:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dots}{P(\tau_1) \to P(f(\tau_1)), P(\tau_2) \to P(f(\tau_2)) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}}{P(\tau_1) \to P(f(\tau_1)), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall\vdash)}{\forall x(P(x) \to P(f(x))), \forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}(\forall}{\forall x(P(x) \to P(f(x))) \vdash \forall x(P(x) \to P(f(f(x))))}$$

Полнота и корректность секвенциального исчисления предикатов

- **Теорема (о корректности)**. Любая формула, выводимая в секвенциальном исчислении предикатов, является общезначимой.
- **Набросок доказательства**. (1) Аксиома общезначима. (2) Правила вывода сохраняют общезначимость. ■
- **Следствие**. Секвенциальное ИП непротиворечиво.
- **Теорема (о полноте)**. Любая общезначимая формула выводима в секвенциальном исчислении предикатов.
- **Набросок доказательства**. (1) Строим алгоритм на основе поиска вывода снизу вверх (постоянно применяем правило сокращения при введении метапеременной для терма). (2) Показываем, что если он не завершается, то формула не общезначима, а если завершается, то либо дерево вывода, либо контрпример. ■

Logitext

- `http://logitext.mit.edu/`
- Logitext is an educational proof assistant for first-order classical logic using the sequent calculus.
- It is intended to assist students who are learning Gentzen trees as a way of structuring derivations of logical statements.
- All you need to do is click on a clause to see what inference rule is triggered.
- In some cases, an input box will pop up; enter a lower case expression like z or $f(x)$.
- You can also choose to duplicate the rules by clicking "Contraction".