Домашнее задание №5
Ряды

1. (1 балл) Доказать, что если $a_n > 0$, $a_{n+1} \leqslant a_n$, $n \in \mathbb{N}$, и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = q,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится в случае, когда $q < \frac{1}{2}$, и расходится в случае, когда $q > \frac{1}{2}$.

2. а) (3 балла) Даны две последовательности положительных чисел: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{c_n}$ расходится. Докажите, что если

$$\varliminf_{n\to+\infty} c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} > 0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и

если, начиная с некоторого номера N

$$c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ расходится.

б) (1 балл) Выведите из пункта а) признак сходимости Даламбера.

в) (1 балл) Выведите из пункта а) признак сходимости Раабе.

3. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}$, $a_n > 0$.

а) (2 балла) Пусть существует предел

$$B = \lim_{n\to+\infty} \ln(n)\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right).$$

Докажите, что при $B > 1$ ряд сходится, а при $B < 1$ ряд расходится.

б) (1 балл) Пусть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где μ и λ — постоянные, а $|\theta_n| \leqslant M$.

Докажите, что

ряд сходится, если $\lambda > 1$ или если $\lambda = 1$, $\mu > 1$, и

ряд расходится, если $\lambda < 1$ или если $\lambda = 1$, $\mu \leqslant 1$.

4. При всех $p \in \mathbb{R}$ исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p, \qquad p > 0$$

а) (1 балл) на абсолютную

б) (1 балл) на условную сходимость

5. При каких α, β, γ (отличных от нуля и целых чисел) и $x \in \mathbb{R}$, сходится ряд:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)} \cdot x^n$$

а) (1 балл) $x \neq -1$, б) (1 балл) $x = -1$?

6. Вычислить сумму или доказать расходимость ряда а) (1 балл)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2};$$

б) (1 балл)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+2)};$$

в) (1 балл)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n, |q| < 1;$$

г) (2 бала)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) - 1 \right).$$

7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

а) (1 балл)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{n^2+3} \cos(n);$$

б) (1 балл)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)\cos(2n)}{n^3 - \ln(n)};$$

в) (2 балла)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \right) \sin(3n)}{3n+1}.$$

8. (1 балл) Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{3n^\alpha + \sin(n)}.$$

9. (1 балл) Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех $q > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{\sqrt{n^q + 1}}.$$

10. (1 балл) При каких $\alpha > 0$ сходится бесконечное произведение

$$\prod_{n=1} \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \right).$$