Основные правила перечислительной комбинаторики. Биномиальные коэффициенты.

1. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?

2. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих ровно одну цифру 7?

3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

4. Переплётчик должен переплести 12 книг в красный, синий и коричневый цвета. Сколько имеется способов это сделать, если в каждый из трех цветов должна быть переплетена хотя бы одна книга?

5. Доказать следующую формулу:

   $$|A\cap B\cap C| = |A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|A\cup C|-|B\cup C|+|A\cup B\cup C|.$$

6. Квадрат разделён на 16 одинаковых квадратов. Сколькими способами можно раскрасить эти квадраты в белый, чёрный, красный и синий цвета так, чтобы в каждом горизонтальном и каждом вертикальном ряду были все четыре цвета?

7. Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \tag{1}$$

8. Доказать, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых $n \geq m \geq k \geq 0$ справедливо равенство

   $$\binom{n}{m}\cdot\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{m-k}.$$

   С его помощью доказать справедливость равенства

   $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{m-k} = 2^m\binom{n}{m}.$$

9. Комбинаторно доказать тождество

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i) = \binom{n+1}{3}.$$

10. Доказать обобщенное правило суммы для произвольного количества n множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|. \tag{2}$$

11. В классическом домино используются кости, разделенные на две части, каждая из которых содержит от нуля до шести точек. Сколько костей существует в обобщенном домино, в котором любая из частей содержит от нуля до n точек? Сколько существует пар таких костей? Сколькими способами из костей обобщенного домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

12. В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске?

13. Рассмотрим все пятизначные положительные числа, в которых на третьей позиции стоит девятка. Сколько таких чисел делится на три? А если в пятизначных числах присутствует хотя бы одна девятка, и позиции, на которых она присутствует, нам не важны?

14. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс?

15. Предположим теперь, что в предыдущей задаче мы дополнительно требуем, чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент. Сколько существует способов это сделать?