Пусть G - граф, добавим петли (петля +1 к степени) так чтобы граф стал регулярным. получим граф G'. Будем блуждать по G' след образом случайно выберем ребро и ~~идем~~ перейдем по нему. если в вершинах мы были с вер. p_i то окажемся с вер:

$\frac{1}{R} \cdot Ap$, пусть $\frac{1}{R} = A'$, тогда след. блуждание приводит к след распределению

$(A')^m p$

$$\left[A' \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}\right]_j = \sum_1 a'_{ji} p_i$$

$$c_1^2 \|u_1\|^2 + c_2^2 \|u_2\|^2 + \dots + c_n^2 \|u_n\|^2 \le 1$$

$$c_i \|u_i\| \le 1$$

$$p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

У нас есть векторы $u_2, \dots, u_n$ - поскольку A' - симметричная матрица

$$(A')^m p = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \lambda_2^m u_2 + \dots + c_n \lambda_n^m u_n$$

Если $|\lambda_i| < 1 - \frac{1}{poly(n)}$, то взяв $m = poly(n)^2 \cdot n$

получим, что $\|\lambda_i^m c_i u_i\| \le \lambda_i^m = \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

Вероятность быть в i вершине $\frac{1}{n} - \frac{n}{e^n} \ge \frac{1}{2n}$

Если повторим блуждания n раз и ошибка станет константой.

осталось док-ть $|\lambda_i| < 1 - \frac{1}{poly(n)}$.

Лемма Для любого k-регулярного связного графа с петлями в каждой вершине верно

$$\max|\lambda_i| \le 1 - \frac{1}{8kn^3} \le 1 - \frac{1}{8n^4}.$$

Док-во $\max_i |\lambda_i| = \max_{u \perp \mathbb{1}} \|Au\|$

$v = Au$

покажем $1 - \|v\|_2^2 \geq \frac{1}{4n^4}$

$\|v\|_2 \le 1 - \frac{1}{4n^4} \Rightarrow \|v\|_2 \le 1 - \frac{1}{8n^4}$

$\|u\|_2 = 1$

$1 - \|v\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \|v\|_2^2$

$$\sum A'_{ij}(u_i - v_j)^2 = \sum A'_{ij}u_i^2 - 2\sum A'_{ij}u_i v_j + \sum A'_{ij}v_j^2 =$$

$$= \|u\|_2^2 - 2\langle Au, v\rangle + \|v\|_2^2 = \|u\|^2 - 2\|v\|^2 + \|v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

достаточно найти $\sum A'_{ij}(u_i - v_j)^2 \geq \frac{1}{4n^4}$.

$A'_{ii} \geq \frac{1}{n}$, поскольку есть петли.

покажем $\exists i j$, что $A'_{ij}(u_i - v_j)^2 \geq \frac{1}{4n^4}$

Если $\exists u_i v_j$, что $|u_i - v_j| \geq \frac{1}{2n^{1,5}}$, то все сделано $\Rightarrow A_{ij}|u_i - v_j| < \frac{1}{2n^{1,5}}$.

Sort coordinates $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n$

It is know $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = 1 \Rightarrow \exists\, u_i$ s.t $u_i^2 \geq \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ ~~www~~ $u_n \leq -\frac{1}{\sqrt{n}}$. ~~Moreo~~ As $\sum_i u_i = 0$

$u_1 > 0,\ u_n < 0 \Rightarrow \quad u_1 - u_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$u_1 - u_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{n-1} - u_n)$

$\Rightarrow \exists\ i$ s.t $u_i - u_{i+1} \geq \frac{1}{n\sqrt{n}} \Rightarrow$

Even $S = \{u_1 \ldots u_i\}$ and $\bar{S} = \{u_{i+1}, \ldots u_n\}$ team

$u_i - u_j \geq \frac{1}{n\sqrt{n}}$, as $u_i - u_j \geq u_i - u_{i+1}$

S and $\bar{S}$ are connected by some edge.

$e = u_i u_j$. We know $|v_j - u_j| \leq \frac{1}{2n^{1.5}} \Rightarrow$

$|u_i - v_j| \geq |u_i - u_j| - \frac{1}{2n^{1.5}} \geq \frac{1}{2n^{1.5}} \Rightarrow$

$A_{ij}(u_i - v_j)^2 \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4n^3} = \frac{1}{4n^4}$.