Задание 9 (на 15.04).

$\boxed{\textbf{CC 49.}}$ Покажите, что:

а) задача вычисления числа полных паросочетаний в двудольном графе сводится к вычислению перманента;

б) четность числа полных паросочетаний в двудольном графе можно узнать за полиномиальное время;

в) если граф представляет собой шахматную доску с выбитыми клетками (вершины — клетки, ребра соединяют соседние клетки), то существует полиномиальный алгоритм, который считает число полных паросочетаний (подсказка: иногда вес ребра удобно взять комплексным).

$\boxed{\textbf{CC 50.}}$ (повторяем лекцию, $\mathbf{IP} = \mathbf{PSPACE}$ пользоваться нельзя) Докажите, что:

а) $\mathbf{AMA} \subseteq \mathbf{PSPACE}$;

б) $\mathbf{AMA} \subseteq \mathbf{PSPACE}$ с приватными случайными битами.

$\boxed{\textbf{CC 51.}}$ Существует вариант класса $\mathbf{MA}$ с односторонней ошибкой. $L \in \mathbf{MA}_1$, если существует такая полиномиальная вероятностная машина V и полином p, что если $x \in L$, то найдется такая строка $y \in \{0,1\}^{p(n)}$, что $\Pr[V(x,y) = 1] = 1$, а если $x \notin L$, то для любой строки $y \in \{0,1\}^{p(n)}$ выполняется $\Pr[V(x,y) = 1] < \frac{1}{3}$. Покажите, что $\mathbf{MA} = \mathbf{MA}_1$.

$\boxed{\textbf{CC 52.}}$ Покажите, что $\mathbf{MA} \subseteq \Sigma_2^P$.

$\boxed{\textbf{CC 26.}}$ (подсказка: $\mathbf{NEXP}^{\mathbf{NP}} vs. \mathbf{NEXP}$) Докажите, что если $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, то существует язык из $\mathbf{EXP}$, схемная сложность которого не меньше $\frac{2^n}{10n}$.

$\boxed{\textbf{CC 40.}}$ Докажите, что если $\mathbf{NP} \subseteq \mathbf{BPP}$, то $\mathbf{NP} = \mathbf{RP}$.

$\boxed{\textbf{CC 44.}}$ Покажите, что:

а) если $\mathbf{BPTime}[f(n)] = \mathbf{BPTime}[g(n)]$, то $\mathbf{BPTime}[f(h(n))] = \mathbf{BPTime}[g(h(n))]$, где f, g, h — конструктивные по времени, $f(n), g(n) \geq \log n$, $h(n) \geq n$ — возрастающая функция;

б) $\mathbf{DTime}[f(n)] \subseteq \mathbf{BPTime}[f(n)] \subseteq \mathbf{DTime}[2^{O(f(n))}]$;

в) $\mathbf{BPP} \subseteq \mathbf{BPTime}[n^{\log n}] \subsetneq \mathbf{BPTime}[2^n]$.

$\boxed{\textbf{CC 45.}}$ Определим язык $\mathtt{QNR} = \{(y, m) \mid y$ не является квадратичным вычетом по модулю $m\}$, докажите, что $\mathtt{QNR} \in \mathbf{IP}$.

$\boxed{\textbf{CC 46.}}$ $\mathbf{BPL}_H$ — это класс языков, для которых существует вероятностная машина Тьюринга M, которая использует логарифмическую память, останавливается с вероятностью 1, и для всех x выполняется, что $\Pr[M(x) = L(x)] \geq \frac{2}{3}$. Покажите, что $\mathbf{BPL}_H \subseteq \mathbf{P}$.