Оценки Чернова. Целочисленное линейное программирование.

17 Апреля 2018

1. Дана матрица A размера $n \times n$ при этом $A_{ij} \in \{0, 1\}$. Найдите с вероятностью $1 - \frac{2}{n}$ вектор u состоящий из 1 и -1, такой что $||Au||_\infty \le O(\sqrt{n \ln n})$.

2. Докажите, что в неравеснтве Чернова правую часть $\left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$ можно заменить на $e^{\frac{-\delta^2}{2+\delta}\mu}$.

3. Покажите, что если μ больше 1, то вероятность $Pr[X > (1+\delta)\mu]$ в неравенстве Чернова не превосходит $\frac{1}{n^3}$ при $\delta = \frac{6 \log n}{\log \log n}$.

4. В задаче Set Cover дано семейство $\mathcal{S}$ подмножеств множества U и требуется выбрать минимальное количество подмножеств из $\mathcal{S}$, которые покрывают все U. Задача f-Set Cover — это частный случай задачи Set Cover, только заранее известно, что любой элемент встречается не более чем в f подножествах из $\mathcal{S}$. У Вас есть волшебная машина которая умеет быстро составлять и решать задачи линейного программирования, используя волшебную машину постройте f-приближение для задачи f-Set Cover. Просто жадный алгоритм в качестве решения **не принимается**!

5. Нам дан граф G с n вершинами и множество пар вершин полиномиального размера $\{(s_i, t_i)\}$. Будем считать, что для любого i количество путей из s_i в t_i полиномиально и все эти пути нам даны. Нам хотелось бы проложить путь из s_i в t_i для любого i, так чтобы максимум по всем ребрам от количество путей проходящих через это ребро был минимальным. Постройте алгоритм который с вероятностью $1 - \frac{1}{n}$ выдает $\frac{6 \log n}{\log \log n}$ приближение для выше описанной задачи.

Подсказка: Составьте задачу линейного программирования. Округлите решение до целочисленного специальным образом. Воспользуйтесь задачей №3 из этого домашнего задания.