Гл. II. Производящие функц.

① Основные определения

1. Опред.] $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произвольная послед. вещ. (или компл.) чисел. Формальный степенной ряд вида

$$A(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

наз. обыкновенной производящей функцией для числовой посл-ти $\{a_k\}$, а формальный степенной ряд вида

$$E(x) := a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

– экспоненциальной производящей функцией ~~для~~ числ. посл-ти $\{a_k\}$.

1.5 Замечание 1. Как видно, для одной и той же числ. посл-ти ∃ много различных произв. функц. Эти 2 – наиб. частые рассматриваемые.

2. Замечание 2. Что означает слово „формальный"? Да то, что его можно рассматривать не как ~~..~~ ряд в классич. его понимании (ст. зр. анализа) ~~т.е. не есть посл-ть частичных сумм; никакие вопросы сходимости этих рядов нас (пока) не интересуют; если угодно, это~~ – а просто как некую удобную картинку, призванную изображать данную числовую посл-ть.

Пример:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n = 1 + 1x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \ldots$$ – это обыкнов. произв. функц. для числовой посл-ти 1, 1, 2, 6, 24, … – картинка, в которой ~~пере~~ ~~менные~~ сим-волы $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ нужны лишь для того, чтобы различать эти числовые посл-ти (т.е. указывать места, на кот. они стоят – аналог индексов). (так: $24x^4 \Rightarrow a_4 = 24$). т.е. если число стоит при x^i, то это число есть a_i – i-й член числовой посл-ти

Идея: формальный числовой ряд – это как бельевая веревка, на которую вы подвешиваете все эти ~~...~~ числовые посл-ти.

~~Переменная ...~~ Соотв-венно, x можно не рассматривать как вещ. или компл. переменную; обычно ~~...~~ не нужно и ~~...~~ вычислять значения (в анал. комб-ке) $A(x)$ или $E(x)$ при конкретных значениях x.

Исключение: значение в нуле; по опред., $A(0) = E(0) = a_0$ – первому члену ряда.

2.5. Зачем же тогда нужна такая форма записи числовых посл-тей? Оказывается, мы можем выполнять различные операции над производящими функциями, и ~~...~~ результатам этих операций можно приписать вполне ~~...~~ ~~...~~ явный, обычно имеет конкретный комбинаторный смысл.

3. ~~Операции~~ 1) Опред. суммой двух (обыкн.) произв. функц. Какие это операции?

$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ (по определению) наз. обыкн. произв. $C(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$, где

2) Аналогично, суммой двух экспоненц. произв. функций

$E(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$ и
$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$
(по опред.) наз. эксп. произв. функция $G(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + \dots$, где $c_i = a_i + b_i$.

Замечание 1. Очевидно, Σ 2х произв. функций отвечает правило Σ в комбин. $\Rightarrow$ его комб. смысл

3) Опред. По опред., произв. 2х обыкнов. произв. функций $A(x)$ и $B(x)$ наз. произв. функция $C(x)$ с коэффициентами

Замет. 2 Здесь комб. смысл сложнее (позже объясним). С правилом произв. в комб-ке связано произв. Адамара 2х произв. функций: $A * B = \sum c_i x^i$, $c_i = a_i b_i$.

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}; \quad c_0 = a_0 b_0; \; c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0; \; c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

Почему? Перемножаем 2 ряда: $\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right) = ?$ При x^0: $a_0 b_0$; при x^1: Σ степеней $a_i b_j = 1$: $a_0 b_1 + a_1 b_0$; при x^2: $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \dots$

4) Опред. По опред., — // — экспон. — // — $E(x)$ и $F(x)$ — // — $G(x)$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

5) Опред. Соответствующие операции над числовыми последоват. наз. 1) сверткой $\{c_n\}$ посл. послед-ей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$
2) биномиальной сверткой $\{c_n\}$ — // —

6) Замечание 1 Как, зная ф-лу для свертки, д-ть ф-лу для биномиальной свертки

а) Запишем
$$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n x^n, \text{ где } \tilde{a}_n = a_n / n!$$
$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{b}_n x^n, \text{ где } \tilde{b}_n = b_n / n!$$

б) Теперь: $\exists$
$$G(x) = E(x) \cdot F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_n x^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{c}_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{a}_n x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{b}_k x^k\right) \Rightarrow \tilde{c}_n = \sum_{i=0}^{n} \tilde{a}_i \cdot \tilde{b}_{n-i} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{c_n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!} \Rightarrow c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$
(а не, допустим, сложение и произв. Адамара)

Почему именно эти 2 операции так важны? Да потому, что

7) Замечание 2. ~~Заметим, что~~ эти операции удовлетворяют свойствам асс-ти и ком-ти сложения и умножения, дистрибутивности умножения относит. сложения, $\Rightarrow$ они образуют некоторую алгебраич. структуру, а именно, коммутативную обл-ть целостности

На формальном алгебр. единица это будет,

Теперь, если мы говорим про алгеб. структуры с введенными т.о. операциями: очевидно, у мн-ва форм. степ. рядов $\exists$ нейтральный элт

8) В случае, если $a_0 \neq 0$, то у форм. степ. ряда $F(x)$ $\exists$ обратный элемент $G(x)$ относит. операции умнож.:
$$F(x) G(x) = 1 \overset{\text{def}}{=} 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$
(единица) по сложению (это 0 0 ...) и по умножению (это 1, 0, 0 ...)

Действит., перемножая $F(x)$ и $G(x)$, имеем:
$$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1/a_0$$

9) Пример $\exists \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n\right)\cdot(1-\alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n;\ c_n = ?$

а) $c_0 = \alpha^0 \cdot 1 = 1\cdot 1 = 1.$

б) $c_1 = \alpha\cdot 1 - \alpha\cdot\alpha^0 \equiv 0;$

в) $c_2 = \alpha^2 - \alpha^1\alpha^1 \equiv 0\ldots$

г) В общем случае $n>0$; $c_n = \alpha^n - \alpha\cdot\alpha^{n-1} \equiv 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

которые сходятся в обычном смысле и непот. функции веществ. или компл. аргумента $f(x)$ и $g(x)$ в непот. диапазоне изменения x.

$\exists$ у нас только имеется какое тождество для функций $f(x)$ и $g(x)$ $\Rightarrow$ мы можем то же тожд-во и для форм. степ. рядов

$\exists$ у нас есть непот. числ. понятие; мы $\mapsto$ непот. произв. функц. (форм. степ. ряды) верное безотносит. того, сходятся или нет соотв. ряды

10) Замечание По сути, это есть не что иное как ф-ла для $\sum$ геом. прогрессии. $\Rightarrow$ это демонстрирует след. общий принцип: если имеется тожд-во со степ. рядами, кот. выполняется если степ. ряды рассматривать как функ. перем. x при непот. x (допустим, при малых x: $x < \frac{1}{\alpha}$), то тогда это тождество продолжает оставаться верным, если рассматривать его как соотнош. между формальными степ. рядами

$(1,1,1,\ldots)\cdot(1,-1,1,-1,\ldots) = ?$

Пример 0: $\exists f(x) = \sum \alpha^n x^n$ — сх-ся при $|\alpha x|<1$. $\exists g(x) = (1-\alpha x) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)g(x) = 1 \Rightarrow$ это равво выполн. и как равво для форм. степ. рядов для $\forall\alpha$ и $\forall x$.

11) Пример 1 Тождество

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 1\cdot\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = ?$$

как тождество для форм. степ. рядов — экспоненц. произв. функц. $=1$

а) Это ~~тождество~~ справедливо ~~как тождество между функциями — оно значит, что~~ можно понимать как равво при 2-х экспон. функц. e^x и e^{-x}, но $e^x\cdot e^{-x} \equiv 1 \Rightarrow$ ~~имеет смысл~~ и тождество верное для $\forall$ ~~как утверждение~~ о формальных степ. рядах. $(\,)(\,)=1$

б) Теперь, расписывая скобки по правилу умн. для эксп. произв. функц., имеем:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 0, & n>0 \\ 1, & n=0. \end{cases}}$$

12) Пример 2 $\exists$ мы имеем след. равво ~~Тождество~~! между членами 2-х числ. посл-тей — f_n и g_n:

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k\cdot 1 \quad \text{—} (*)$$

$\exists f_n$ отвечает форм. степ. ряд вида $\sum f_n \frac{x^n}{n!} =: F(x)$ кот. при непот. x сходится и функц. $F(x)$, и g_n — $G(x)$

а) $\exists F(x), G(x)$ — эксп. произв. функц. для послед. $F(x)$ и $G(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow (*)$ как тождество между эксп. произв. функциями значит:

$$F(x) = G(x)\cdot e^x, \text{ где } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ эксп. пр. функц. для числ. } (1,1,1,\ldots$$

13) <u>Пример 3</u> Мы доказали, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x} \Rightarrow \text{при } \alpha=1: \text{ функц.}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$ — является <u>обыкновенной</u> производящей функцией для числ. посл-ти $(1, 1, 1, \ldots)$.

Как и произв. функц. e^x для экспоненц. произв. функц., функц. $\frac{1}{1-x}$ очень полезна ~~везде~~ для обыкнов. произв. функц.

а) Действительно, ∃ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, тогда:

$$\frac{1}{1-x} f(x) \overset{\text{по правилу произв.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = g(x), \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_n \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} a_n$$ —

посл-ть частичных сумм!

б) Т.о., если у нас есть числ. посл-ть $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, и ей отвечает ~~обыкнов.~~ произв. функц. $f(x)$, то, ~~поделив её на~~ умножив её на $\frac{1}{1-x}$, мы получим произв. функцию для частичных Σ-м этой числовой посл-ти.

<u>Но</u>: это не означает, что мы умеем решать и такую задачу: ∃ у нас известна посл-ть частичных сумм c_n для неизв. посл-ти a_n, как найти саму посл-ть? Если $c_n \sim g(x)$, то: умножая $g(x) \cdot (1-x)$ получим $f(x)$ — произв. функцию для самой посл-ти a_n.

14) <u>Пример 4</u> Из бином. теоремы:

$f(x) = (1+x)^r$ — есть произв. функц. для числ. посл-ти $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \ldots\right)$ — ∞-ной, если $r \in \mathbb{R}$.

а) Тогда:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{n}{i}}_{=a_i} x^i \\ g(x) &= (1+x)^m = \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{m}{j}}_{=b_j} x^j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{(1+x)^{n+m}}_{f(x)\cdot g(x)=} = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{n+m}{k}}_{=c_k} x^k$$

с одной стороны

б) С другой же стороны, по правилу прим. обыкнов. произв. функц. имеем

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$ —

тождество Вандермонда.

15) <u>Пример 5</u> Заметим, что

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (n)_k \cdot \frac{x^k}{k!} \Rightarrow$$

② Рекуррентные соотношения

1. Начнем с примера. Популяция лягушек (в озере) увеличивается в 4 раза каждый год. В первый день ∀ года 100 лягушек уходят на другое озеро. Предполагая, что в нач. момент времени в озеро ~~ту~~ посадили „на развод" 50 лягушек, найти кол-во лягушек в начале ∀ следующего года.

• ∃ a_i – число лягушек в начале $n^{го}$ года; $a_0 = 50$; тогда:

$$a_1 = 4\cdot 50 - 100 = 100;\quad a_2 = 4\cdot 100 - 100 = 300 \ldots;$$

Вообще: $\boxed{a_{n+1} = 4\cdot a_n - 100}$ – рекурр. соотнош., $n = 0,1,\ldots$

2. Опр-е ∃ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произв. числовая посл-ть. Если для $\forall n \geq m$ число a_{n+m} является некот. ф-цией от (m) предыдущих членов посл-ти, т.е.

$$\boxed{a_{n+m} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1})} \qquad (*)$$

то такая посл-ть наз. рекуррентной посл-тью, а соотнош. (*) – рекурр. соотношением $m^{го}$ пор-ка.

В случае линейной ф-ции f имеем т.н. линейное однор. рекурр. соотнош.:

$$a_{n+m} = b_1(n)\cdot a_{n+m-1} + b_2(n)\cdot a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1}(n)\, a_{n+1} + b_m(n)\, a_n$$

и –//– неодн. $a_{n+m} = \ldots + u_n(n)$

Самый простой случай – это т.н. лин. однор. рекурр. соотнош. с пост. коэф-ами:

Формально: имея рекурр. соотн. ⊕ нач. условие мы решили задачу: мы, последовательно используя (*), можем найти a_n для $\forall n$. Однако иногда нам хочется все же найти явное выр-е для a_n, или, как говорят, решить рекурр. соотн.

$$a_{n+m} = b_1 a_{n+m-1} + b_2 a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-1} a_{n+1} + b_m a_n$$

и –//– неодн. $a_{n+m} = \ldots + u_n$

Очевидно, что для однозначного опр-я всех a_n необх. также задать т.н. начальные условия – задать $1^{е}$ m членов $a_0, \ldots$

3. Прежде чем доказывать общие теоремы, рассм. самый простой случай рекурр. соотнош. – лин. однор. рекурр. соотнош. $1^{го}$ пор-ка

Как же это делать?

$$a_{n+1} = b\cdot a_n,\quad a_0 \text{ – заданное число};\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

• а) Очевидно, что $a_1 = b\, a_0$; $a_2 = b\, a_1 = b^2 a_0; \ldots;$ $\boxed{a_n = b^n a_0}$ – решение рекурр. соотнош. с заданным нач. усл.

б) Допустим теперь, что мы откуда-то с потолка предположили, что решение степенным образом зависит от n, т.е.

$$a_n = z^n \quad \text{для некот. } z.$$

Тогда, подставляя это выр-е в исходное рекурр. соотн., мы видим, что это действит. получим:

$$z^{n+1} = b\, z^n \Rightarrow z = b \Rightarrow a_n = b^n$$ – некоторое (некот. решение рекурр. соотн.)

решение рекурр. соотнош-ия (или, как говорят, частное в) Но: оно, очевидно, не удовл-ет нач. условиям:

действительно, $a_0 = b_1^0 = 1$, а нужно, чтобы это число $= a_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ заметим тогда, что если $a_n = b_1^n$ есть некот. частное решение рекурр. соотнош., то, умноженное на произвольную константу, оно тоже останется решением:

$$\exists\ a_n = C\cdot b_1^n,\quad C = \forall \text{ число},\ \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\cdot b_1^{n+1} = C\cdot b_1 b_1^n \Leftrightarrow C \equiv C \text{ — тождество.}$$

Т.о., имея частное решение, мы получили, как говорят, общее реш-ие рекурр. соотношения:

$$a_n = C\cdot b_1^n,\quad C = \forall \text{ вещ. число } \neq 0$$

Формально: решение рекурр. соотнош. m-го пор-ка наз. общим если оно зависит от m произв. констант $C_1, \dots, C_m$ и $\forall$ решение данного рекурр. соотнош-ия м.б. получено подбором этих констант.

г) Используя эту константу, можно удовл-ть нашим нач. условиям:

$$a_0 = C\cdot b_1^0 = C\cdot 1 \Rightarrow C = a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = a_0 b_1^n}$$ — решение нашего рекурр. соотнош-ия с заданными нач. условиями.

Зачем же все это мы так подробно разжевывали!

4. Перейдем теперь к случаю $m=2$, т.е. рассм. лин. одн. рекурр. ур-ие ~~вида~~ 2-го порядка вида

$$a_{n+2} = b_1 a_{n+1} + b_2 a_n \qquad (*)$$

1) Вновь предположим, что частное решение ур-ия $(*)$ имеет вид

$$a_n = z^n \Rightarrow z^{n+2} = b_1 z^{n+1} + b_2 z^n \Leftrightarrow$$ получили для квадратное ур-ие –

$$\Leftrightarrow \boxed{z^2 - b_1 z - b_2 = 0} \Rightarrow \qquad (**) \text{ — т.н. характеристическое ур-ие.}$$

$\Rightarrow$ Найдя $\forall$ решение z_0 этого хар. ур-ия, мы найдем тоже некот. частное решение ур-ия $(*)$.

2) В общем случае ур-ие $(**)$ имеет 2 корня. Рассм. вначале случай, когда $(**)$ имеет 2 различных вещ. корня z_1 и z_2. Покажем, что в этом случае выр-ие

$$a_n = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n$$

является общим решением ур-ия $(*)$. а) Действительно, подставив это выр-ие в $(*)$, имеем:

$$C_1 z_1^{n+2} + C_2 z_2^{n+2} = b_1 C_1 z_1^{n+1} + b_1 C_2 z_2^{n+1} + b_2 C_1 z_1^{n} + b_2 C_2 z_2^{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1\left(z_1^{n+2} - b_1 z_1^{n+1} - b_2 z_1^{n}\right) + C_2\left(z_2^{n+2} - b_2 z_2^{n+1} - b_2 z_2^{n}\right) \dots$$

Собственно, это и так очевидно в силу линейности рекурр. соотнош. (*).

б) Покажем теперь, что это - действительно общее решение, т.е. что мы всегда сможем так подобрать константы c_1 и c_2, чтобы удовлетворить произв. нач. условиям a_0, a_1

~~вида~~

Действительно,

$$a_0 = c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 = c_1 + c_2$$
$$a_1 = c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единств. решение.

---

3) Самый популярный пример: числа Фибоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1; \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0$$

а) Характеристич. ур-ие: $r^2 = r + 1 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

б) Нач. условие:

$$F_0 = 0 = c_1 + c_2$$
$$F_1 = 1 = c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = c_1 \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right] = c_1\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow c_1 = +\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n.$$

---

4) Задание 1 Показать, что в случае равных корней характ. ур-ия (**) общее реш-ие (*) имеет вид

$$a_n = c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n.$$

5) Задание 2 Показать, что в случае комплексных корней —"—

$$a_n = c_1 \rho^n \cdot \cos(n \cdot \vartheta) + c_2 \cdot \rho^n \sin(n\vartheta),$$ где

ρ и ϑ - модуль и аргумент компл. числа r_1: $r_1 = \rho \cdot e^{i\vartheta} \Rightarrow r_2 = \bar{r_1} = \rho e^{-i\vartheta}$.

---

5. Аналогично разбирается случай однор. лин. рекурр. соотнош. с пост. коэфф-ми в случае $m > 2$

1. Вернемся к задаче о лягушках. Раздача:

$$a_{n+1} = 4a_n - 100. \qquad (*)$$

Разумеется, можно обобщить метод решения предыд. §-фа на неоднородные ур-ия, однако легче на этом ур-ии продемонстрировать, как решать лин. рекурр. соотнош. с пом. обыкновенных произв. функций.

1) Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ – обыкнов. произв. функция для искомой числовой посл-ти, удовл-ющей ур-ию (*). Домножим ур-ие (*) на x^{n+1} и просуммируем его по n от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - 100 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}$$

а) Левая часть – это „почти" $f(x)$: заменим $n' := n+1$, имеем: $n' = 1..+\infty \Rightarrow \sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'} x^{n'} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$

б) Правая часть: $4 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 4x \cdot f(x)$;

$$-100 \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = -100 \cdot x \cdot \frac{1}{1-x}$$

в) Т.о. имеем для $f(x)$ следующее ур-ие:

$$f(x) - a_0 = 4x\, f(x) - 100 \frac{x}{1-x} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{a_0}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}} -$$

мы построили обыкнов. произв. функцию для (искомой) числ. посл-ти.

2) Мы же хотим найти явное выр-ие для a_n. Как это сделать? Нужно левую и правую часть разложить в ряд и сравнить члены при одинак. степенях x.

а) Мы знаем, что $g(x) = \frac{1}{1-4x} = 1 + 4x + (4x)^2 + \dots$

б) Далее, чтобы сотворить такой же трюк со 2-м слагаемым, разложим дробь на простые множители:

$$\frac{x}{(1-x)(1-4x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-4x} = \frac{A - 4Ax + B - Bx}{(1-x)(1-4x)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + B = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\tfrac{1}{3} \Rightarrow B = \tfrac{1}{3} \Rightarrow$$

в) $\boxed{a_n = a_0 \cdot 4^n - 100 \cdot \frac{1}{3} \cdot [4^n - 1]}$ – явное аналитич.

2. Итак, алгоритм использования обыкнов. произв. функций для решения лин. рекурр. соотнош-ий с пост. коэфф-ами заключается в след.:

1) Вводится обыкнов. произв. функция $f(x)$ числ. последов{a

2) Рекурр. соотнош-ие трансформируется в ур-ие для $f(x)$ с.о.: ур-ие умножается на x в ~~нужной~~ степени $(n+k)$ а затем суммируется по n от 0 до $+\infty$. Затем нужные понятия или все это выражается через $f(x)$

3) Решается ур-ие для $f(x)$ Затем, понимая это ур-ие как тождество для функц, и кот. сходится формал. степ. ряд при малых x,

4) Коэфф-т a_n находится как коэфф-т при ~~разл~~ x^n в разложении $f(x)$ по степеням x.

3. Пример - снова числа Фибоначчи.

$$F_0 = 0, \; F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (*)$$

1) $\exists$ $F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots$ — обыкнов. произв. функция для чисел Фиб.

2) Домножим $(*)$ на x^{n+2} и просумм-уем по n от 0 до $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x) - F_0 - F_1 x = x \cdot [F(x) - F_0] + x^2 \cdot F(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(x)[1 - x - x^2] = F_0 + (F_1 - F_0)x = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

3) Для получения явного выраж-ия для F_n разложим $F(x)$ на простейшие дроби:

$$F(x) = \frac{A}{1 - \alpha x} + \frac{B}{1 - \beta x};$$

так как $\frac{1}{1 - \alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots$, то $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (A\alpha_n + B\beta_n) x^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_n = A\alpha_n + B\beta_n$$

4) Уже: $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x) = \Big(1 - \underbrace{\tfrac{1+\sqrt5}{2}}_{=\varphi} x\Big)\Big(1 - \underbrace{\tfrac{1-\sqrt5}{2}}_{=:\hat\varphi} x\Big)$;

$$F(x) = \frac{A}{1 - \varphi x} + \frac{B}{1 - \hat\varphi x} = \frac{x}{1 - x - x^2} \Rightarrow A = -B = \frac{1}{\varphi - \hat\varphi} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[\varphi^n - \hat\varphi^n\right]}$$

4. Рассмотрим теперь общий случай линейного неоднор. рекурр. соотношения m-го порядка:

$$a_{n+m} = \tilde{b}_1 a_{n+m-1} + \tilde{b}_2 a_{n+m-2} + \ldots + \tilde{b}_{m-1} a_{n+1} + \tilde{b}_m a_n + u_n, \ n=0,1,2,\ldots$$

с заданными нач. условиями $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$.

1) Для удобства: перепишем это соотнош-ие в след. виде

$$b_0 a_{n+m} + b_1 a_{n+m-1} + \ldots + b_m a_n = u_n, \quad n=0,1,2\ldots \quad (*)$$

(т.е. положили $b_0 = 1$, $b_i = -\tilde{b}_i$, $i=2,\ldots,m$).

2) Домножим $(*)$ на x^{n+m} и проΣ-уем по n от 0 до $+\infty$; получаем:

$$b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} x^{n+m} + b_1 x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m-1} \cdot x^{n+m-1} + \ldots + b_m x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+m}$$

Введем для послед. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ обычнов. произв. функцию

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Тогда:

а) $b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m} x^{n+m} = b_0 \cdot \left[f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-1} x^{m-1} \right]$

б) $b_1 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+m-1} x^{n+m-1} = b_1 x^1 \left[f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{m-2} x^{m-2} \right]$

$\ldots$

в) $b_{m-2} x^{m-2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} = b_{m-2} x^{m-2} \left[f(x) - a_0 - a_1 x \right]$

г) $b_{m-1} x^{m-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = b_{m-1} x^{m-1} \left[f(x) - a_0 \right]$

д) $b_m x^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = b_m x^m f(x)$

е) $x^m \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n =: x^m \cdot u(x)$.

3) Введем следующие обозначения:

а) $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m$

б) $c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$; в) $\sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k =: h(x)$

Тогда наше последнее равво можно переписать с.о.

$$f(x) \cdot g(x) = b_0 a_0 + (b_0 a_1 + b_1 a_0) x + \ldots + (b_0 a_{n+m-1} + b_1 a_{n+m-2} + \ldots + b_{m-2} a_1 + b_{m-1} a_0) x^{m-1} + x^m u(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k + u(x) x^m = h(x) + u(x) x^m \Rightarrow$$

$$\boxed{\ldots = h(x) + x^m \cdot u(x)}$$

5. Замечания 1) Заметим, что в случае однородного лин. рекурр. соотнош-ия с пост. коэф-тами m-го порядка производящая ф-ция для рекурр. посл-ти $a_0, a_1, a_2, \dots$ представляет собой рациональную функцию:

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k x^k}{\sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k}$$

По сути, мы установили вз-одн. соотв-вие между лин. одн. рекурр. соотнош-ями на коэф-ты a_n и рациональными производящими функциями.

2) Для получения явного выр-ия для a_n нам необходимо научиться делить один мн-н на другой. Можно это делать „в лоб", но лучше ~~в~~ разложить эту дробь на простейшие - элементарные дроби вида

$$\frac{A}{1-\alpha x}, \quad \frac{B}{(1-\alpha x)^2}, \quad \dots, \quad \frac{D}{(1-\alpha x)^n},$$

а затем воспользоваться разложением этих дробей в степенные ряды.

При этом: дробь $\frac{1}{1-\alpha x}$ мы раскладывать в ряд научились:

$$\frac{1}{1-\alpha x} = 1+\alpha x+\alpha^2 x^2+\dots$$

Как раскладывается дробь $\frac{1}{(1-\alpha x)^n}$?

Легче всего - с.о.: $\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = (1-\alpha x)^{-n} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{-n}{k} (-\alpha x)^k =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-n)_k}{k!}(-\alpha x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdot\ldots\cdot(-n-k+1)}{k!}(-\alpha x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}{k!}(-1)^k\cdot(\alpha x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k}(\alpha x)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\!\binom{n}{k}\!\right)\cdot(\alpha x)^k$$

3) В частности, имеем след. полезные ф-лы:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^2} = 1+2\alpha x+3\alpha^2x^2+4\alpha^3x^3+\dots+(n+1)\alpha^n x^n+\dots$$

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^3} = 1+3\alpha x+6\alpha^2x^2+10\alpha^3x^3+\dots+\frac{(n+1)(n+2)}{2}\alpha^n x^n \dots$$