Курс: Функциональное программирование
Практика 2. Рекурсия и редукция

Разминка

▶ Эквивалентны ли термы:

$$\lambda x.\, x$$
$$\lambda y.\, y$$
$$\lambda x y.\, x y$$

▶ Найдите WHNF и NF для

$$\boldsymbol{\omega}\ 2$$
$$\boldsymbol{\omega}\ 3$$
$$\boldsymbol{\omega}\ n$$

Напоминание: $\boldsymbol{\omega} \equiv \lambda x.\, x\, x$.

Каррирование

Если функция двух аргументов задана в традиционном стиле $f\,(\mathtt{pair}\ x\ y)$ (на паре, т.е. декартовом произведении), то перейти к стандартной записи можно *каррированием*:

$$\mathtt{curry} \;=\; \lambda f\, x\, y.\, f\,(\mathtt{pair}\ x\ y)$$

▶ Реализуйте обратную процедуру, `uncurry`.

Функция предшествования для чисел Чёрча

Вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \mathtt{zp} &\equiv \mathtt{pair}\ 0\ 0 \\ \mathtt{sp} &\equiv \lambda p.\, \mathtt{pair}\ (\mathtt{snd}\ p)\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \end{aligned}$$

Вторая работает так

$$\mathtt{sp}\ (\mathtt{pair}\ i\ j) \;=\; \mathtt{pair}\ j\ (j+1)$$

$$\begin{aligned} \mathtt{sp}^0\ (\mathtt{zp}) &= \mathtt{pair}\ 0\ 0 \\ \mathtt{sp}^m\ (\mathtt{zp}) &= \mathtt{pair}\ (m-1)\ m \end{aligned}$$

(здесь $m > 0$). Тогда функция предшествования:

$$\mathtt{pred} \;=\; \lambda m.\, \mathtt{fst}\ (m\ \mathtt{sp}\ \mathtt{zp})$$

▶ Какая у неё временная сложность?

▶ Что нужно поменять, чтобы вышел факториал?

Числа Чёрча: **примитивная рекурсия**.
Обобщим предыдущую схему

$$
\begin{aligned}
\texttt{xz} &\equiv \lambda x.\,\texttt{pair}\ x\ 0\\
\texttt{fs} &\equiv \lambda f\,p.\,\texttt{pair}\ (f\ (\texttt{fst}\ p)\ (\texttt{snd}\ p))\ (\texttt{succ}\ (\texttt{snd}\ p))\\
\texttt{rec} &\equiv \lambda m\,f\,x.\,\texttt{fst}\ (m\ (\texttt{fs}\ f)\ (\texttt{xz}\ x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \langle & x, \arrow[dl] & 0\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
 & & \langle f & x \arrow[dl] & 0, & 1\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
 & \langle f\ (f & x \arrow[dl] & 0) & 1, & 2\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\texttt{succ}"] \\
\langle f\ (f\ (f & x & 0) & 1) & 2, & 3\,\rangle
\end{tikzcd}
$$

В частности,

$$\texttt{pred} \ = \ \lambda m.\,\texttt{rec}\ m\ (\lambda x\,y.\,y)\ 0$$

► Реализуйте факториал через комбинатор примитивной рекурсии `rec`.
► Реализуйте функцию суммирования чисел от 1 до n.
► Реализуйте функцию нахождения n-ой частичной суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Конструкторы **списков** можно определить так:

$$
\begin{aligned}
\texttt{nil} &\equiv \lambda c\,n.\,n\\
\texttt{cons} &\equiv \lambda e\,l\,c\,n.\,c\,e\,(l\,c\,n)
\end{aligned}
$$

Например,

$$
\begin{aligned}
&[\,] = \texttt{nil} \ = \ \lambda c\,n.\,n\\
&[5,3,2] \ = \ \texttt{cons}\ 5\ (\texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil})) \ = \ \lambda c\,n.\,c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))
\end{aligned}
$$

Функция, определяющая пуст ли список

$$\texttt{empty} \ \equiv \ \lambda l.\,l\ (\lambda h\,t.\,\texttt{fls})\ \texttt{tru}$$

► Проверьте правильность работы `empty`.
► Попробуйте найти более «короткую» версию `empty`.
► Постройте функцию `head`, возвращающую голову списка, например

$$\texttt{head}\ [5,3,2] \ = \ 5$$

Хотя для комбинатора неподвижной точки Карри $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x))$ выполняется $\mathbf{Y}\,F \;=_\beta\; F\,(\mathbf{Y}\,F)$, но неверно ни $\mathbf{Y}\,F \;\twoheadrightarrow_\beta\; F\,(\mathbf{Y}\,F)$, ни $F\,(\mathbf{Y}\,F) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Y}\,F$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Y}\,F & \equiv & (\lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x)))\,F \\ & \to_\beta & (\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x)) \\ & \to_\beta & F((\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x))) \;\; \to_\beta \;\; \ldots \end{array}$$

► Проверьте, что комбинатор неподвижной точки Тьюринга $\mathbf{\Theta}$

$$A = \lambda x\,y.\,y\,(x\,x\,y), \;\; \mathbf{\Theta} = A\,A$$

обладает нужным свойством.
► Найдите G, такой что $\forall X \;\, G\,X \twoheadrightarrow X\,(X\,G)$.

Домашнее задание

►(1 балл) Приведите пример замкнутого чистого λ-терма находящегося
– в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
– в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

► (4 балла) Постройте функцию `tail`, возвращающую хвост списка, например

$$\texttt{tail}\;[5,3,2] \;=\; [3,2]$$

► (1 балл) Постройте функцию `sum`, суммирующую элементы списка, например

$$\texttt{sum}\;[5,3,2] \;=\; 10$$

►(2 балла) Используя $\mathbf{Y}$-комбинатор, сконструируйте
– «пожиратель», то есть такой терм F, который для любого M обеспечивает $F\,M = F$.
– терм F таким образом, чтобы для любого M выполнялось $F\,M = M\,F$.
– терм F таким образом, чтобы для любых термов M и N выполнялось $F\,M\,N = N\,F\,(N\,M\,F)$.

►(2 балла) Пусть имеются взаимно-рекурсивное определение функций `f` и `g`:

$$\begin{array}{rcl} \texttt{f} & = & F\,\texttt{f}\,\texttt{g} \\ \texttt{g} & = & G\,\texttt{f}\,\texttt{g} \end{array}$$

Используя $\mathbf{Y}$-комбинатор, найдите нерекурсивные определения для `f` и `g`.