Математическая логика и теория вычислимости
Лекция 4. Исчисление высказываний генценовского типа

Денис Николаевич Москвин

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

15.03.2018

План лекции

План лекции

1. Понятия контрпримера и секвенции
2. Исчисление секвенций
3. Корректность и полнота исчисления секвенций
4. Допустимые правила

Идея контрпримера

- Пусть имеется некоторая формула A. Как выяснтить, что она не тавтология?
- Привести *контрпример*, то есть построить оценку, на которой эта формула является ложной.
- Для построения контрпримера можно разбирать формулу:
  - если главная связка — дизъюнкция, то ищем значения переменных, при которых оба аргумента ложны;
  - если главная связка — отрицание, то ищем значения переменных, при которых аргумент истинен;
  - если главная связка — импликация, то ищем значения переменных, при которых посылка истинна, а заключение — ложно;
  - если главная связка — конъюнкция, то ищем значения переменных, при которых либо один аргумент ложен, либо другой.

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\frac{}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\overline{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}
$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p, q, \neg p} \qquad \vdash p, q, q}{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

Поиск контрпримера

Будем разбирать, например, формулу $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q$, записывая то, что должно быть истинным слева от значка $\vdash$, а то что должно быть ложным — справа.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, q}{\vdash p, q, \neg p} \qquad \vdash p, q, q}{\vdash p, q, \neg p \wedge q}}{\vdash p \vee q, \neg p \wedge q}}{\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge q}}{\vdash \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge q}$$

- Слева контрпримера нет: p одновременно должно быть истинным или ложным при искомой оценке.
- Справа — есть: $p = 0$, $q = 0$.

Понятие секвенции

- *Секвенцией* называют конструкцию вида

$$\Gamma \vdash \Delta$$

где Γ и Δ — конечные наборы формул, возможно пустые.

- Набор формул Γ называют *антецедентом*, а Δ — *сукцедентом* секвенции.
- Примеры секвенций

$$p \wedge q, \neg p \vdash p \vee \neg q, q$$

$$p \rightarrow q, \neg p \vdash$$

$$\vdash \neg p \wedge \neg q, p \rightarrow q$$

Общезначимые секвенции

- Оценка называется *контрпримером для секвенции*

$$\Gamma \vdash \Delta$$

  если при этой оценке истинны все члены антецедента Γ и ложны все члены сукцедента Δ.
- Любой секвенции $\Gamma \vdash \Delta$ можно сопоставить формулу

$$\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$$

- Пустая коньюнкция при этом рассматривается как 1, а пустая дизъюнкция — как 0.
- Секвенция называется *общезначимой*, если представляющая ее формула общезначима. При этом секвенция не имеет контрпримера.

План лекции

1. Понятия контрпримера и секвенции
2. Исчисление секвенций
3. Корректность и полнота исчисления секвенций
4. Допустимые правила

Правила вывода для исчисления секвенций (1)

- В исчислении секвенций имеется 8 правил вывода — по два на каждую связку.
- Все правила сохраняют “заказ на контрпример” снизу вверх.
- *Правило введения конъюнкции в антецедент*:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\wedge \vdash)$$

- *Правило введения конъюнкции в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \quad (\vdash \wedge)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (2)

- *Правило введения дизъюнкции в антецедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\vee \vdash)$$

  Фактически это правило разбора случаев.
- *Правило введения дизъюнкции в сукцедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \quad (\vdash \vee)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (3)

- *Правило введения импликации в антецедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\to\vdash)$$

- *Правило введения импликации в сукцедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad (\vdash\to)$$

Правила вывода для исчисления секвенций (4)

- *Правило введения отрицания в антецедент*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\neg \vdash)$$

- *Правило введения отрицания в сукцедент*:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \quad (\vdash \neg)$$

Структурные правила

- Предыдущие правила называют *логическими*. Ниже приведены так называемые *структурные* правила, носящие вспомогательный характер.
- *Правила расширения (weakening)*:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (W \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad (\vdash W)$$

- *Правила сокращения (contraction)*:

$$\frac{A, A, \Gamma \vdash \Delta}{A, \Gamma \vdash \Delta} \quad (C \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad (\vdash C)$$

- *Правила перестановки (permutation)*:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Theta \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Theta \vdash \Delta} \quad (P \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Theta} \quad (\vdash P)$$

Аксиома исчисления секвенций

- Если принять все структурные правила, то аксиома выглядит так

$$A \vdash A$$

- Если принять все структурные правила, то аксиома выглядит так
$$A \vdash A$$
- Если рассматривать антецедент и сукцедент как множества, а не как последовательности и отказаться от использования правила расширения, то аксиома будет выглядеть так
$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$
- В исчислении высказываний можно ограничиться требованием, чтобы A и все формулы, составляющие Γ и Δ, были пропозициональными переменными.

Дерево поиска вывода и дерево вывода

- Под *выводом* формулы A в исчислении секвенций будем понимать вывод секвенции

$$\vdash A$$

- Нахождение посылок некоторого применения правила вывода по известному заключению называется *контрприменением* этого правила.
- Дерево с конечным числом узлов, каждый из которых является секвенцией, называется *деревом поиска вывода* секвенции.
- Если все листья такого дерева оказались аксиомами, то получившееся дерево называют *деревом вывода*.
- В противном случае мы находим контрпример и заключаем, что формула не выводима в исчислении секвенций.

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\frac{}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p} \quad (\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \quad (\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \to p \vdash p}}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{}{(p \to q) \to p \vdash p}\;(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\;(\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \to B, \Gamma \vdash \Delta}\;(\to\vdash)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p \to q, p} \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\ (\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash p \to q, p}\ (\vdash\to) \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\ (\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\vdash\to)$$

Контр-применяемое правило:

$$\dfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ (\vdash\to)$$

Пример

- Выведем в исчислении секвенций закон Пирса

$$\vdash ((p \to q) \to p) \to p$$

- Строим дерево поиска вывода

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q, p}{\vdash p \to q, p}\,(\vdash\to) \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p}\,(\to\vdash)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,(\vdash\to) \quad \blacksquare$$

Правило сечения

- Среди классических правил вывода, восходящих к Генцену, имелось ещё *правило сечения (cut)*:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad A, \Theta \vdash \Sigma}{\Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Sigma} \quad (\mathrm{CUT})$$

- Для наших целей это правило крайне неудобно, поскольку делает невозможным простой алгоритм поиска контрпримера.
- К счастью, сам же Генцен доказал для широкого класса секвенциальных исчислений *теорему об устранении сечения*.
- Для нашего пропозиционального исчисления эта теорема будет тривиальным следствием его полноты и корректности.

План лекции

Корректность исчисления секвенций

- **Теорема (о корректности исчисления секвенций).** Если секвенция не имеет контрпримера, то она выводима.
- **Доказательство.** Строим дерево поиска контрпримера, поскольку контрпримера нет, то все листья — аксиомы. Получили дерево вывода. ■
- **Следствие.** Любая тавтология пропозициональной логики выводима в исчислении секвенций.

- **Теорема (о полноте исчисления секвенций).** Если секвенция выводима, то она не имеет контрпримера.
- **Доказательство.** Индукция по структуре вывода. База: аксиомы не имеют контрпримера. Шаг: анализ правил вывода. ■

План лекции

1. Понятия контрпримера и секвенции
2. Исчисление секвенций
3. Корректность и полнота исчисления секвенций
4. Допустимые правила

Правило введения $\leftrightarrow$ в сукцедент

- Хотелось бы иметь правила для введения связки $\leftrightarrow$ в антецедент и сукцедент секвенции.
- Напомним, что $A \leftrightarrow B$ по определению

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

- Выведем соответствующее правило

$$\cfrac{\cfrac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}(\vdash\to) \qquad \cfrac{B, \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash B \to A, \Delta}(\vdash\to)}{\Gamma \vdash (A \to B) \wedge (B \to A), \Delta} \quad (\vdash \wedge)$$

- Итак, *правило введения* $\leftrightarrow$ *в сукцедент секвенции*

$$\frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta \qquad B, \Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B, \Delta} \quad (\vdash\leftrightarrow)$$

Правило введения $\leftrightarrow$ в антецедент

- Аналогично можно вывести *правило введения* $\leftrightarrow$ *в антецедент секвенции*

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash A, B, \Delta}{A \leftrightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} \quad (\leftrightarrow\vdash)$$