1 Элементарные неравенства

Теорема 1.1 *Верны следующие цепочки неравенств:*

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \binom{2n}{2} < \cdots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}$$

$$\binom{2n}{2n} < \binom{2n}{2n-1} < \binom{2n}{2n-2} < \cdots < \binom{2n}{n+1} < \binom{2n}{n}$$

Теорема 1.2

$$\frac{2^{2n}}{2n+1} < \binom{2n}{n} < 2^{2n}.$$

2 Формула Стирлинга

Формула Стирлинга *Выполнено равенство*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)).$$

Следствие 2.1

$$\binom{2n}{n} = (1 + o(1))\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

.

Теорема 2.2 *Верны неравенства:*

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

3 Более сложные неравенства

Теорема 3.1 *Пусть* $0 < \alpha < 1$, *тогда:*

$$\frac{1}{\sqrt{8\alpha(1-\alpha)n}} \cdot 2^{H(\alpha)n} \le \sum_{i=0}^{\alpha n}\binom{n}{i} \le 2^{H(\alpha)n},$$

где $H(\alpha) = -\alpha\log\alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha)$, *функция энтропии.*

Теорема 3.2 *Пусть* $k^2 = o(n)$. *Тогда*

$$\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \text{ то есть } \binom{n}{k} = (1 + o(1))\frac{n^k}{k!}.$$

Теорема 3.3

$$\binom{n+k}{k} \le 2^{2\sqrt{nk}}.$$