Циркуляции и напряжения. Электрические сети

Практика

6 октября 2017 г.

1. (1.5 балла). Прямоугольная матрица M размерами $n \times m$ называется вполне унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы принимает значения из множества $\{0, +1, -1\}$. Доказать, что матрица инцидентности $\mathbf{M_i}$ орграфа D является вполне унимодулярной матрицей. Что можно сказать о матрицах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, составленных из базисных векторов пространств $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, а также о матрице Кирхгофа $\mathbf{K}$ орграфа D?

2. (2 балла). Доказать, что граф G является двудольным тогда и только тогда, когда его матрица инцидентности $\mathbf{M_i}$ является вполне унимодулярной.

3. (1 балл). Рассечение плоскости квадратами, при котором ровно один квадрат имеет сторону, равную числу Фибоначчи F_i, называется фибоначчиевым замощением плоскости. Построить подобное замощение.

4. (1 балл). Совершенным кубом называется куб, разбитый на более мелкие кубики попарно различных размеров. Доказать, что совершенный куб существовать не может.

5. (1.5 балла). В параграфе, посвященном матричной теореме о деревьях, мы доказали следующее утверждение. Пусть S есть произвольный набор из $(n-1)$-го ребра орграфа D, а B_S есть подматрица базисной матрицы , столбцы которой отвечают ребрам из набора S. Определитель $\det(B_S) \neq 0$ тогда и только тогда, когда индуцированный S подграф T соответствующего D графа G представляет собой остовное дерево G. Доказать это утверждение, используя полученные в данном параграфе результаты.

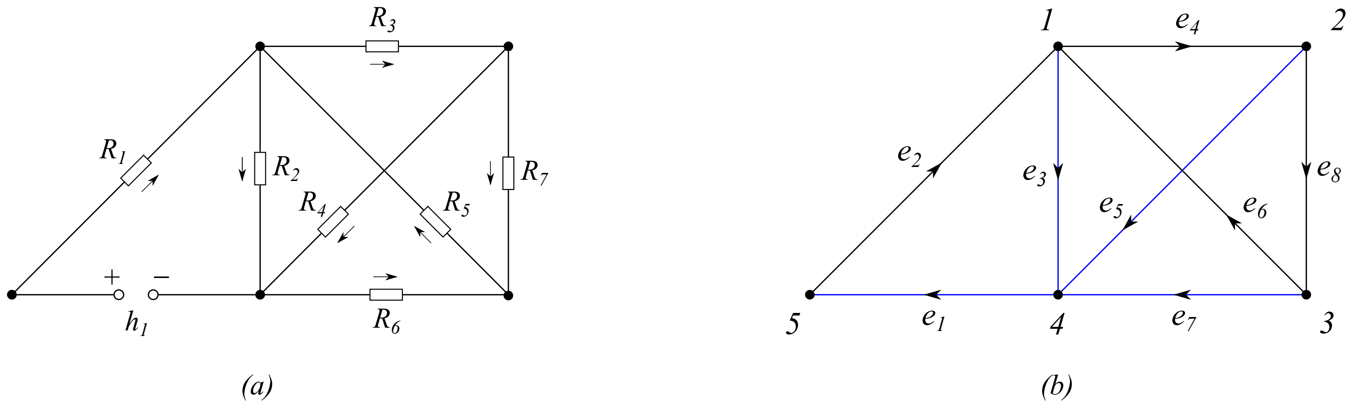

Рис. 1

6. (1.5 балла). Пусть D есть связный орграф, B — базисная матрица пространства $\mathcal{B}$. С использованием результатов данного параграфа и предыдущего упражнения доказать, что количество $t(D)$ остовных деревьев рассчитывается по формуле

$$t(D) = \det(B \cdot B^T).$$

7. (1.5 балла). Для электрической цепи, показанной на рис.1,a, а также для соответствующего ей орграфа, показанного на рис.1,b, найти токи в цепи в случае, когда все сопротивления R_j, $j = 2, \ldots, 8$, равны единице, а напряжение $h = 12$.