20 ноября 2017

Количество баллов на зачет: *8*

1. *(1.5 балла)* Найти максимальные паросочетания в графах G_1 и G_2, изображенных на рис.1, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденные паросочетания действительно являются максимальными.

2. *(1.5 балла)* Найти максимальное паросочетание в графе G, изображенном на рис.2, и доказать с помощью формулы Татта-Бержа, что найденное паросочетание действительно является максимальными.

3. *(1.5 балла)* Показать, что в кубе Q_k найдется по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний для всех $k \geq 2$.

4. *(1 балл)* Назовем граф G фактор-критическим, если в нем нет совершенного паросочетания, но при удалении любой вершины оно появляется. Доказать, что никакой двудольный граф $G[X, Y]$ фактор-критическим быть не может.

5. *(1.5 балла)* Обозначим через G_n граф, построенный на $2n$ вершинах $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, и имеющий ребра вида $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{y_i, y_{i+1}\}$, а также $\{x_i, y_i\}$. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в таком графе.

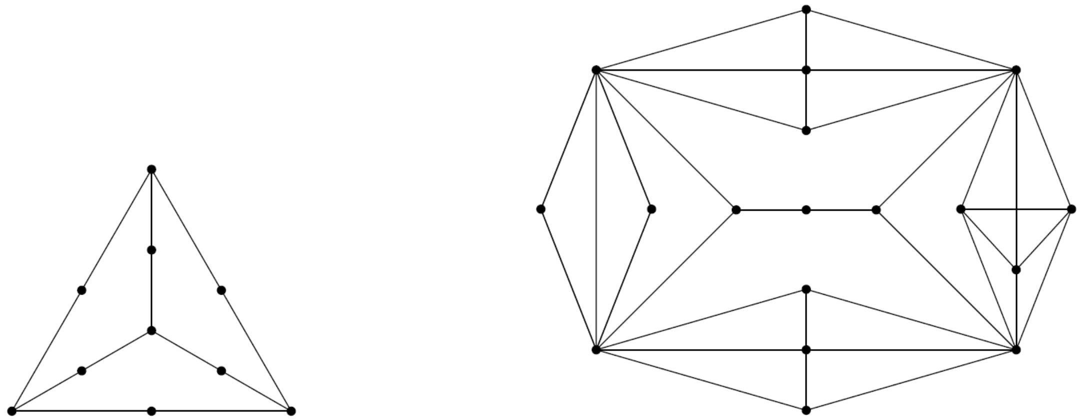
6. *(1 балл)* Пусть G — граф, в котором все вершины имеют нечетную степень. Предположим, что в графе G существует совершенное паросочетание M. Доказать, что такое паросочетание обязано включать любой мост в графе G.

7. *(2 балла)* Пусть G есть k-регулярный граф, построенный на четном количестве вершин, остающийся связным при удалении любых ребер в количестве $k-2$ штук. Доказать, что для любого ребра $e \in E(G)$ существует совершенное паросочетание графа G, содержащее e.

8. *(1.5 балла)* Пусть $G[X, Y]$ есть двудольный граф. Образуем из него граф $\tilde{G}$ добавлением к Y дополнительной вершины z в случае, если $n = |V(G)|$ есть нечетное число, а также добавлением к Y ребер до превращения его в клику. Доказать, что исходный граф G имеет паросочетание размером $|X|$ тогда и только тогда, когда в $\tilde{G}$ существует совершенное паросочетание.

9. *(1.5 балла)* Доказать, что любой кубический граф, имеющий не более двух мостов, допускает декомпозицию на пути длины 3.

10. *(2 балла)* Для любого $k > 1$ предъявить k-регулярный граф, в котором совершенное паросочетание отсутствует.



(a) Граф G_1 (b) Граф G_2

Рис. 1

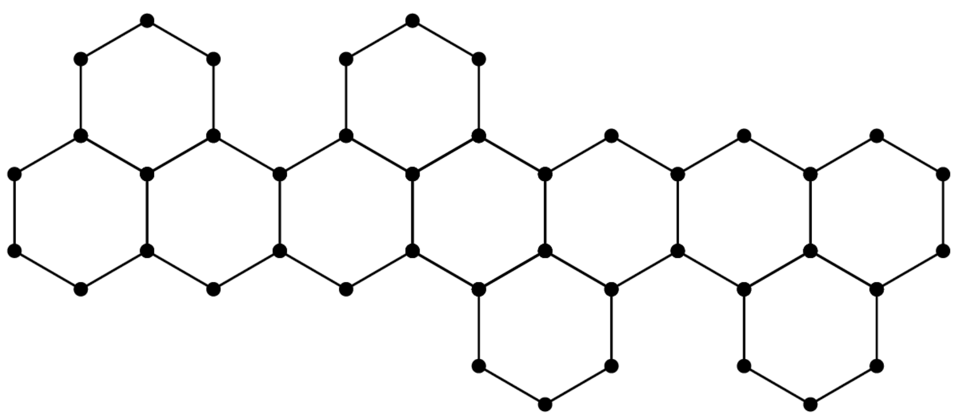


Рис. 2