

# Карты. Теорема Понтрягина-Куратовского. (ДЗ)

9 апреля 2017 г.

1. Показать, что в любом простом внешнепланарном графе обязательно существует вершина, степень которой меньше или равна двум, причем в случае графа, построенного на  $n > 3$  вершинах, имеется как минимум две несмежные вершины, степени которых не превосходят двух.
2. Какое максимально возможное количество ребер может иметь внешнепланарный граф? Когда достигается этот максимум?
3. Две правильные укладки  $\tilde{G}_1$  и  $\tilde{G}_2$  планарного графа  $G$  называются эквивалентными друг другу, если подмножество ребер графа  $G$  образует границу грани  $f_1$  плоского графа  $\tilde{G}_1$  тогда и только тогда, когда это же подмножество образует границу  $f_2$  плоского графа  $\tilde{G}_2$ . Иными словами, две укладки эквивалентны друг другу в случае, если одну из них можно получить из другой таким перемещением вершин и ребер графа, при котором ни одна из вершин не пересекает границы инцидентных ей граней.

Рассмотрим произвольное вложение простого двусвязного планарного графа  $G$  в плоскость. Выделим в этом вложении произвольную внутреннюю грань  $f$ . Индукцией по числу  $r$  граней доказать, что существует такое эквивалентное ему правильное вложение  $G$  в плоскость, при котором все ребра соответствующего  $G$  плоского графа  $\tilde{G}$  изображаются прямыми линиями, а границы грани  $f$  образуют выпуклый многоугольник.

4. С использованием предыдущего результата доказать теорему Фейри, утверждающую, что любой связный простой планарный граф можно вложить в плоскость так, что все его ребра окажутся отрезками прямых.

5. Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, построить правильное вложение графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$ .
6. Используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, построить правильное вложение графа Петерсена в тор, доказав тем самым, что род графа Петерсена равен 1.
7. С помощью формулы Эйлера доказать, что граф  $K_7$  можно правильно вложить в тор, а граф  $K_8$  уже нельзя. Нарисовать правильное вложение  $K_7$  в тор, используя представление тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами.
8. Проективную плоскость можно представлять в виде диска, у которого отождествляется любая пара диаметрально противоположных точек, лежащих на ограничивающей диск окружности. Построить правильное вложение графа Петерсена в проективную плоскость, используя такое представление проективной плоскости.