1 Домашнее задание на 10 ноября

1. Докажите, что если F — свободная подгруппа с двумя образующими x, y, то $x, yxy^{-1}, y^2xy^{-2}, \ldots, y^nxy^{-n}$ порождают в F свободную подгруппу ранга $n+1$ (т.е. группу, изоморфную свободной группе с $n+1$ образующей).

2. Покажите, что в любой свободной группе множество всех слов четной длины образует подгруппу индекса 2.

3. Пусть $H \triangleleft G, K \triangleleft G$ и $H \cap K = \{e\}$. Докажите, что $hk = kh \, \forall h \in H, k \in K$.

4. Пусть A — абелева группа, записанная адитивно (операция обозначается $'+'$). И пусть для $n \in \mathbb{N}$ выполняется $nx = 0 \forall x \in A$. Предположим $n = rs$, где r, s — взаимно простые числа. Пусть $A_s := \{x \in A : sx = 0\}$, $A_r := \{x \in A : rx = 0\}$. Покажите, что $A_s, A_r \leqslant A$ и, более того $A \cong A_r \oplus A_s$.

   Указание: воспользоваться тем, что для взаимно простых чисел r и s найдутся такие целые m и k, что $rm + sk = 1$.

5. Покажите, что все элементы группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеют конечный порядок, но $|\mathbb{Q}/\mathbb{Z}| = \infty$.