Элементарная комбинаторика

1 Основные правила перечислительной комбинаторики

1. Напомним вначале основные понятия теории множеств.

1.1. *Определение.* Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

`Пример:` студенты в аудитории; все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку "собрались в данной аудитории".

Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их называть n-множествами.

1.2. Основные операции над множествами — объединение, пересечение, разность, дополнение — удобно изучать графически, с использованием т.н. диаграмм Эйлера-Венна. Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad\qquad A' \cup B' = (A \cap B)'.$$

1.3. *Определение.* Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \bigcup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

`Пример:` разбиение студентов курса на группы.

Если важен порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении.* Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в каком они туда выходят; поэтому в данном случае мы имеем понятие упорядоченного разбиения.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X; это есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение. Разделение — это упорядоченное семейство $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, состоящее из *фиксированного* количества k попарно непересекающихся, и, возможно, пустых множеств, объединение которых дает все X.

1.4. *Определение.* Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску; любая клетка шахматной доски имеет координаты 'буква-цифра', например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать; в этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

Определение. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных строк вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$. По сути, любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченное k-множество, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *k-мультимножестве над множеством X*.

`Пример:` монеты в кошельке; в этом случае в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка, } 5 \text{ копеек, } 10 \text{ копеек, } 50 \text{ копеек, } 1 \text{ рубль, } 2 \text{ рубля, } 5 \text{ рублей, } 10 \text{ рублей}\};$$

любой набор этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над этим множеством X.

1.5. В комбинаторике для некоторых наиболее важных понятий теории множеств введены следующие специальные понятия:

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-множества;
2. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-множества;
3. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$;
4. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством.

2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Очевидный ответ: $3 + 2 = 5$-ю способами.

2.2. Простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого элемента, можно n способами выбрать другой элемент из множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k+n$ способами.

2.3. Очевидно, что на языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: пусть имеются два непересекающихся множества A, $|A|=k$, и B, $|B|=n$; тогда

$$|A \cup B| = k + n.$$

2.4. В более общем случае: для любого *разбиения* конечного множества X справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|;$$

это равенство и называется правилом суммы в комбинаторике.

2.5. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Простейший пример на применение этого правила в комбинаторике: пусть в аудитории находятся 32 представителя подгруппы SE, 8 представителей подгруппы CS и 4 представителя подгруппы BI; сколькими способами можно выбрать тройку, состоящую из представителей каждой подгруппы? Очевидно, что $32 \cdot 8 \cdot 4$ способами.

3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его вначале для самого простого случая двух множеств, а затем обобщим на случай n множеств.

3.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (1) можно называть обобщенным правилом суммы; оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

3.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у любого подмножества $A \subset X$ имеется дополнение к нему — подмножество A', и $A \cup A' = X$. При этом, так как $A \cap A' = \varnothing$, то, согласно правилу суммы, имеет место равенство $|A| + |A'| = |X|$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана, $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом последнего равенства и обобщенного правила суммы (1) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{2}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (2), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

3.4. Несложно обобщить равенства (1) и (2) на случай большего количества множеств. Так, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{3}$$

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

`Упражнение 1.` Доказать следующую двойственную к (3) формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

`Упражнение 2.` Выписать и доказать аналогичные формулы для общего случая k множеств.

2 k-сочетания из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

1. В качестве первого важного примера на применение описанных в первом параграфе правил сосчитаем количество k-сочетаний без повторений; раньше в советской литературе это число обозначалось через C_n^k; современное обозначение для этих чисел $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

1.1. Обычно на вопрос, чему равно это число, вспоминают явную формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Однако для расчетов более удобна рекуррентная формула, которая выводится с помощью правила суммы.

1.2. Введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Разобьем Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось сосчитать количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

1.3. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества из $(n-1)$-элементного множества $X \backslash x_1$; сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \backslash x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

1.4. Соотношение (4) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\ n \neq 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$ и построить так называемый треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

1.5. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно: выбирая любое k-элементное множество, мы, тем самым, однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество; следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

1.6. Наряду с треугольником Паскаля мы будем также активно пользоваться и другим графическим представлением чисел $\binom{n}{k}$. Именно, рассмотрим координатную плоскость (n, k), и в точках с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n$ отметим числа $\binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Заметим, что в таком представлении числа $\binom{n}{k}$ можно трактовать как количество различных путей, состоящих из диагональных $(1,1)$ и вертикальных $(1,0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0,0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n,k). Для этого представления рекуррентное соотношение (4) можно трактовать следующим образом: количество путей в точку с координатами (n,k) складывается из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$, и из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$.

2. В качестве следующего применения правила суммы в комбинаторике докажем следующее важное тождество для коэффициентов $\binom{n}{k}$ — формулу суммирования по верхнему индексу:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \underbrace{\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots + \binom{m-1}{m}}_{=0} + \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{5}$$

2.1. Для формального доказательства этого тождества применим рекуррентное соотношение (4) к коэффициенту $\binom{k+1}{m+1}$:

$$\binom{k+1}{m+1} = \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$$

Просуммируем теперь полученное равенство по k от m до n:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m+1} = \\
&= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \\
&= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k'=m+1}^{n} \binom{k'}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

2.2. Комбинаторное доказательство тождества (5) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{m+1} всех $(m+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{m+1}| = \binom{n+1}{m+1}$.

Разбиение множества Σ_{m+1} будем проводить следующим образом. В первый блок разбиения мы включим все $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент x_{n+1}; во второй —

$(m+1)$ -элементные подмножества, содержащие x_n и не содержащие x_{n+1}; в третий — $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие x_{n-1} и не содержащие x_n и x_{n+1} и т.д. В последний блок включим $(m+1)$ -элементное подмножество, не содержащее элементов $x_{m+2},\ldots,x_n,x_{n+1}$, т.е. подмножество $\{x_1,x_2,\ldots,x_m,x_{m+1}\}$.

Число элементов в первом блоке равно $\binom{n}{m}$, во втором — $\binom{n-1}{m}$, в третьем — $\binom{n-2}{m}$, и так далее. В последнем блоке содержится ровно один элемент. Складывая эти коэффициенты, получаем тождество (5).

`Пример.` Пусть $n=4$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, $m=2$, $m+1=3$; приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1,x_2,x_3\},\qquad \{x_1,x_2,x_4\},\qquad \{x_1,x_2,x_5\},\qquad \{x_1,x_3,x_4\},\qquad \{x_1,x_3,x_5\},$$

$$\{x_1,x_4,x_5\},\qquad \{x_2,x_3,x_4\},\qquad \{x_2,x_3,x_5\},\qquad \{x_2,x_4,x_5\},\qquad \{x_3,x_4,x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2}=6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2}=3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1,x_2,x_3,\}$.

3. `Упражнение.` Доказать комбинаторно следующие тождества:

3.1. Формула суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}.$$

3.2. Тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}.$$

4. Коэффициенты $\binom{n}{k}$ часто называют биномиальными коэффициентами. Название это связано с тем, что они, в частности, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}. \tag{6}$$

4.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n=\underbrace{(x+y)}_{1}\cdot\underbrace{(x+y)}_{2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{(x+y)}_{n}.$$

После перемножения этих скобок в правой части будут стоять слагаемые вида x^ky^{n-k}, $k= =0,1,\ldots,n$. Количество таких слагаемых при фиксированном k равно, очевидно, количеству способов выбора k сомножителей x среди n сомножителей, стоящих в правой части. А это количество и есть, по определению, число $\binom{n}{k}$.

4.2. Формула (6) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество *всех* подмножеств данного n-множества равно 2^n. Комбинаторное доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе.

4.3. Далее, полагая в (6) $x = -1$, $y = 1$, получаем важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

4.4. Наконец, продифференцируем (6) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}.$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

5. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

5.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Как подсчитать это количество в общем случае?

5.2. Для решения данной задачи воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f : X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

5.3. Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней; вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

5.4. Вернемся теперь к задаче подсчета всех k-сочетаний с повторениями, т.е. всех k-мультимножеств над n-множеством X. Сосчитаем вначале количество таких мультимножеств в случае, когда n-множество $X = [n] =: \{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что любое такое мультимножество может быть записано в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих равенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3-1) = 4).$$

Теперь: зачем нам все это было нужно? Дело в том, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$ всех чисел от единицы до $n + k - 1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но: количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$.

5.5. Количество всех k-сочетаний с повторениями над n-множеством X обычно обозначается следующим образом: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Мы, таким образом, доказали, что в случае $X = [n]$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-множества X следует из принципа биекции.

5.6. `Упражнение 1.` Доказать формально и комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества k-сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right), \qquad n, k = 1, 2, \ldots$$

$$\left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

5.7. `Упражнение 2.` Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

Используя последнее равенство, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

3 k-перестановки из n элементов. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам.

1. Перейдем теперь к подсчету количества k-перестановок из n элементов, т.е. к подсчету различных *упорядоченных* наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, в которых все a_i принадлежат одному и тому же n-элементному множеству X.

1.1. Заметим, прежде всего, что в различной литературе встречается довольно много альтернативных названий для данного объекта. Именно, упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$, также иногда называется

– k-размещением из n элементов;

– кортежем из k элементов множества X;

– упорядоченной k-выборкой из n элементов;

– k-мерным вектором над множеством X;

– k-элементным словом над n-элементным алфавитом.

1.2. Элементы a_i в наборе $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k-перестановках с повторениями, во втором — о k-перестановках без повторений.

Номер паспорта — это типичный пример k-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Классическим примером 3-перестановки без повторений является упорядоченный список спортсменов, занявших призовые места в любых спортивных соревнованиях.

1.3. **Утверждение 1.** Количество k-перестановок с повторениями из n элементов равно n^k.

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове я могу выбрать любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же имеем n^k вариантов записать это слово.

1.4. В качестве важного приложения доказанного выше результата сосчитаем еще раз, на этот раз комбинаторно, количество подмножеств данного множества X. Для этого воспользуемся принципом биекции, а именно, закодируем любое подмножество A n-множества X строкой $f(A)$ длины n из нулей и единиц. Единицу на i-м месте поставим в случае, если элемент $x_i \in A$; в противном случае мы на i-м месте поставим ноль.

`Пример.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_4\}$. Тогда соответствующая подмножеству A строка длины 4 записывается следующим образом:

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n-множества X совпадает с количеством строк длины n над алфавитом из двух цифр $\{0, 1\}$, которое, согласно доказанному выше утверждению 1, равно 2^n.

1.5. **Утверждение 2.** Количество $P(n,k)$ k-перестановок из n элементов без повторений равно

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

`Упражнение.` Доказать формально и комбинаторно следующие рекуррентные соотношения для чисел $P(n,k)$:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

1.6. В частном случае $k = n$ k-перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n-элементного множества X. Их количество равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

1.7. Любую k-перестановку из n элементов без повторений можно рассматривать и как упорядоченное k-подмножество n-множества. Мы знаем, что количество всех k-подмножеств n-множества равно $\binom{n}{k}$, а количество способов упорядочить k-подмножество равно количеству перестановок этих k элементов, т.е. $k!$. Следовательно, числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $n \neq \mathbb{N}$, а принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k\,(k-1)\,\ldots\,1}, & \text{если } k \in \mathbb{Z}_+, \\ 0, & \text{если } k < 0, \end{cases} \qquad \forall\, q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$

2. Практически все задачи элементарной комбинаторики, связанные с подсчетом количества k-сочетаний и k-перестановок, могут быть сведены к одной из двух простейших схем — либо к так называемой урновой схеме, либо к схеме раскладки предметов по ящикам.

2.1. В урновой схеме имеется урна, в которой находятся n *различимых* предметов. Из урны последовательно вытаскивается k предметов. Задача состоит в подсчете количества различных способов выбора этих предметов, или, как еще говорят, в подсчете различных k-элементных выборок из n предметов, находящихся в урне.

На практике наиболее часто встречаются четыре модификации этой задачи, различающиеся способами формирования k-элементной выборки. Во-первых, мы можем разрешить возвращать вытаскиваемые предметы обратно в урну. В этом случае говорят о *выборке с повторениями.* В противном случае имеем *выборку без повторений.* Во-вторых, выборки могут быть *упорядоченными* или *неупорядоченными* в зависимости от того, важен нам или не важен порядок вытаскиваемых предметов.

Нетрудно убедиться в том, что все эти четыре задачи представляют собой некоторые (иногда более удобные на практике) переформулировки уже разобранных выше задач о подсчете количества k-сочетаний или k-повторений n-элементного множества. Решения этих задач можно записать в виде следующей таблицы:

Предметы на выходе:	с возвращением	без возвращения
упорядоченные	n^k	$(n)_k$
неупорядоченные	$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	$\binom{n}{k}$

2.2. Второй, не менее популярной в элементарной комбинаторике схемой, связанной с подсчетом количества k-перестановок и k-сочетаний, является схема раскладки предметов по ящикам. В этой схеме имеется n *различимых* ящиков, по которым нужно разложить k различимых или неразличимых предметов. Количество предметов в каждом ящике также может быть различно и определяться из условий конкретной задачи. Таким образом, как и в случае урновой схемы, в данной задаче имеются несколько различных подзадач, связанных с подсчетом количества k-перестановок и k-сочетаний. Целью оставшейся части данного параграфа является подробный анализ каждой из таких подзадач, а также сравнение этих подзадач с аналогичными подзадачами для урновых схем.

3. Начнем с задач, связанных с подсчетом количества различных k-перестановок из n предметов с повторениями.

3.1. `Пример.` Сколькими способами можно разложить по двум *различимым* карманам (например, левому и правому) девять монет *различного* достоинства?

Ответ достаточно очевиден — это можно сделать 2^9 способами. Действительно, любую из девяти различных монет я могу положить либо в левый, либо в правый карман. Следовательно, по правилу произведения имеется

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{9} = 2^9$$

различных способов раскладки.

3.2. Рассмотренный пример является типичной задачей, связанной с подсчетом количества различных k-перестановок из n элементов с повторениями, которая естественным образом сводится к схеме раскладки предметов по ящикам. В задачах такого рода имеется n различимых ящиков и k различимых же предметов; требуется подсчитать количество способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в любой ящик можно класть любое количество предметов (в частности, не положить ни один предмет). Количество способов совершить эти действия равно, очевидно, n^k. Доказательство этого факта производится абсолютно аналогично тому, как это было сделано в приведенном выше примере.

3.3. Рассмотренная в п.3.1 задача, однако, не всегда решается верно: в качестве ответа иногда выдают 9^2 способов. Путаница, как правило, происходит потому, что эту задачу пытаются свести к урновой схеме, считая, что имеются урна, в которой расположены 9 различных предметов, и 2 различимые позиции на выходе.

Для того, чтобы этой путаницы избежать, полезно сформулировать следующие основные отличия схемы раскладки по ящикам от соответствующей ей урновой схемы: в схеме раскладки предметов по ящикам

1. предметы обратно не возвращаются, они остаются в ящике;
2. в любой ящик можно класть любое количество предметов; в аналогичной урновой схеме на любую позицию можно помещать ровно один предмет.

Полезно также отметить, что к урновым схемам в данном случае, как правило, относятся задачи, которые сводятся к перечислению k-элементных слов над n-элементным алфавитом.

3.4. `Упражнение 1.` На перекрестке имеется 6 светофоров. Сколько существует различных состояний этих светофоров, если каждый из них независимо от других имеет три возможных состояния — горит красный, горит желтый или горит зеленый?

3.5. `Упражнение 2.` В купе поезда едет 6 человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?

4. Сформулируем теперь схему раскладки предметов по ящикам, связанную с подсчетом количества k-перестановок из n элементов без повторений.

4.1. В этой схеме по-прежнему имеется n различимых ящиков и k различимых предметов. Требуется сосчитать количество различных способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в любом ящике может находиться *не более одного* предмета (т.е. 0 или 1 предмет).

4.2. И в этой задаче ответ практически очевиден: 0 способов в случае $k > n$, и $(n)_k$ способов при $0 \leqslant k \leqslant n$. Действительно, в последнем случае первый предмет я могу разместить в любом из n ящиков, второй — в любом из оставшихся $(n-1)$ ящиков и так далее.

4.3. Сформулируем в заключение отличия этой схемы от соответствующей ей урновой схемы:

1. в урновой схеме на входе задачи имеется n предметов в урне и k незанятых позиций вне ее; на выходе задачи в урне остается $n-k$ предметов, а вне ее — k предметов, расположенных на k различных позициях;

2. в схеме раскладки по ящикам на входе задачи имеется k различных предметов и n различных пустых ящиков; на выходе задачи все k предметов распределены ровно по k ящикам, и имеются еще $(n-k)$ пустых ящиков.

5. Перейдем теперь к схемам раскладки по ящикам, связанным с подсчетом количества k-сочетаний. Начнем с задач, связанных с подсчетом количества k-сочетаний из n элементов без повторений, т.е. с подсчетом k-элементных подмножеств n-элементного множества.

5.1. На языке раскладки предметов по ящикам задача подсчета количества k-сочетаний из n элементов без повторений формулируется следующим образом. Имеются n различимых ящиков и k неразличимых предметов. Требуется подсчитать количество различных способов раскладки этих предметов по ящикам при условии, что в каждом ящике может находиться не более одного предмета.

Почему же это есть задача о подсчете количества k-подмножеств n-элементного множества? Да потому, что в данной задаче в качестве n-элементного множества выступает множество, состоящее из n различимых ящиков. Мы выбираем из него некоторое k-элементное подмножество, размещая в каких-то k ящиках по одному (неразличимому) предмету. Эти предметы, по сути, выступают метками, которыми мы помечаем k из n различимых ящиков. Количество способов это сделать равно, очевидно, количеству различных k-элементных подмножеств n-множества, т.е. $\binom{n}{k}$.

5.2. Приведем некоторые наиболее характерные примеры использования этой схемы.

`Пример 1.` У отца имеется 5 (неразличимых) апельсинов, которые он может раздать восьми своим сыновьям. Если его задача состоит в том, чтобы раздать их максимальному количеству сыновей, то он должен поставить дополнительное условие — любой из его сыновей не должен получить более одного апельсина. В этом случае количество способов, которыми он может раздать своим сыновьям эти пять апельсинов, равно, очевидно, $\binom{8}{5}$.

`Пример 2.` В физике встречаются задачи, в которых имеются n различных уровней энергии и k неразличимых элементарных частиц. Если эти частицы — фермионы, то для них действует так называемый принцип запрета Паули, согласно которому на любом энергетическом уровне может находиться не более одной элементарной частицы. Как следствие, количество различных распределений k фермионов по n энергетическим уровням равно $\binom{n}{k}$.

5.3. *Замечание.* Отличия схемы раскладки по ящикам от урновой схемы для задачи подсчета количества k-сочетаний из n элементов без повторений аналогичны тем, что были сформулированы для задачи подсчета количества k-перестановок из n элементов без повторений. Именно, в урновой схеме имеется n различимых предметов, из которых выбирается k предметов на k неразличимых позиций. В схеме раскладки по ящикам имеется n различимых ящиков (позиций), по k из которых раскладываются k неразличимых предметов.

6. Наконец, перейдем к схеме раскладки по ящикам, связанной с подсчетом количества k-сочетаний из n элементов с повторениями, т.е. с подсчетом k-мультимножеств над n-элементным множеством.

6.1. В этой схеме также имеются n различимых ящиков и k неразличимых предметов. Требуется определить количество способов раскладки предметов по ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в одном ящике.

Очевидно, что если в качестве n-элементного множества X выбрать множество n различимых ящиков, то любая раскладка k неразличимых предметов по этим ящикам будет задавать некоторое k-мультимножество n-множества X. Следовательно, количество различных способов раскладки равно в этом случае $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

6.2. Приведем несколько характерных примеров.

`Пример 1.` У отца по-прежнему имеется пять (неразличимых для него) апельсинов, которые он хочет раздать восьмерым своим сыновьям. Однако теперь он раздает их по каким-то там заслугам, и может, таким образом, любому сыну отдать любое количество апельсинов. В этом случае количество способов это сделать равно $\left(\!\binom{8}{5}\!\right) = \binom{12}{5}$.

`Пример 2.` В задачах о распределении k неразличимых элементарных частиц по n различимым уровням энергии наряду с фермионами существуют частицы (бозоны), для которых не существует ограничений на количество частиц, занимающих один и тот же уровень энергии. Для бозонов количество таких распределений равно, очевидно, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

6.3. Достаточно часто на практике встречаются ситуации, когда одну и ту же задачу можно свести и к урновой схеме, и к схеме раскладки предметов по ящикам.

`Пример.` В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Сколькими различными способами можно купить семь пирожных? Ответ в этой задаче, очевидно, равен $\left(\!\binom{3}{7}\!\right) = \binom{9}{7}$. Этот ответ можно, например, получить, представляя себе коробку с тремя отделениями, в каждое из которых кладется пирожное только одного вида; в этом случае мы сводим задачу к подсчету количества раскладок семи неразличимых предметов по трем различимым ящикам. Другой способ получить тот же ответ — это представлять себе урну, в которой находятся три разных пирожных, и считать количество способов выбора из урны семи пирожных с возвращениями любого выбранного пирожного обратно в урну. Наконец, можно вообще забыть о любых схемах, если понимать, что любые семь купленных пирожных трех различных видов представляют собой 7-мультимножество над 3-элементным множеством различимых пирожных.

6.4. `Упражнение.` Сосчитать количество способов раскладки k неразличимых предметов по n различимым ящикам при условии, что в каждом ящике должен находиться как минимум один предмет.

7. К задачам раскладки неразличимых предметов по различимым ящикам, связанным с подсчетом количества k-сочетаний, сводятся задачи о так называемом *разбиении* натурального числа k на n слагаемых.

7.1. Задача о разбиении числа k на n слагаемых формулируется следующим образом: сколькими способами можно представить натуральное число k в виде суммы n слагаемых вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$$

при условии, что порядок слагаемых важен, т.е. при условии, что разбиения вида

$$1+3+3+3=10 \qquad \text{и} \qquad 3+1+3+3=10$$

считаются различными?

7.2. Если на числа a_i накладывается единственное условие вида $a_i \geqslant 0$, то количество разбиений равно количеству $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ k-мультимножеств над n-элементным множеством. Действительно, в упорядоченной сумме $a_1+a_2+\ldots+a_n$ любой индекс i слагаемого a_i можно рассматривать как i-й ящик, в который мы складываем a_i единиц. Следовательно, эту задачу можно трактовать как задачу о раскладке k "неразличимых"единиц по n различимым ящикам.

7.3. `Пример.` Подсчитать количество разбиений числа $k=4$ на два слагаемых:

$$a_1+a_2=4, \qquad a_1,a_2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\left(\!\binom{2}{4}\!\right)=\binom{5}{4}=5$ разбиений; перечислим их:

$$0+4=1+3=2+2=3+1=4+0=4.$$

7.4. К подсчету числа k-сочетаний из n элементов без повторений задача о разбиении числа k сводится в случае, когда на числа a_i накладываются следующие условия:

$$a_i=0 \qquad \text{или} \qquad a_i=1.$$

В этом случае индекс i также можно трактовать как i-й ящик; его можно выбрать (положив $a_i=1$) или не выбрать (положив $a_i=0$). Всего же нужно выбрать k таких ящиков. Это можно сделать $\binom{n}{k}$ способами.

7.5. `Пример.` Подсчитать количество разбиений числа 2 на три слагаемых при условии, что любое слагаемое может принимать значения 0 или 1. Ответ: $\binom{3}{2}=3$ способа вида

$$1+1+0=1+0+1=0+1+1=2.$$

7.6. `Упражнение.` Подсчитать количество разбиений числа k при ограничениях

$$a_i \geqslant s_i, \quad i=1,\ldots,n; \qquad s_1+s_2+\ldots+s_n =: s \leqslant k.$$

4 Подсчет количества отображений конечных множеств

1. Оказывается, задачи о раскладке различимых предметов по различимым же ящикам имеют и еще одну, чрезвычайно важную комбинаторную интерпретацию — они эквивалентны задачам о подсчете количества отображений конечных множеств.

1.1. *Определение.* Пусть X, Y — пара конечных множеств. Отображением f из X в Y называется правило, согласно которому любому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$:

$$\forall\, x \in X \qquad \exists!\, y \in Y: \qquad y=f(x).$$

1.2. С комбинаторной точки зрения любое отображение f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y можно рассматривать как некоторый вариант раскладки n различимых предметов по k различимым ящиками при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике.

`Пример.` Рассмотрим отображение f из трехэлементного множества X в четырехэлементное множество Y вида

$$f(x_1) = y_2, \qquad f(x_2) = y_2, \qquad f(x_3) = y_4.$$

Этому отображению отвечает раскладка трех различимых предметов по четырем различимым ящикам, при которой первые два предмета размещаются во втором ящике, а третий предмет — в четвертом ящике.

Как следствие, общее количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y равно k^n.

1.3. Вспомним теперь определение *инъективного* отображения.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным, если из условия

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Иными словами, отображение называется инъективным, если у любого образа (элемента $y \in Y$) имеется не более одного прообраза, т.е. элемента $x \in X$, такого, что $y = f(x)$.

1.4. Понятно, что любому инъективному отображению $f : X \to Y$ отвечает такая раскладка n элементов множества X, при которой в каждом из k ящиков находится не более одного элемента. Как следствие, количество всевозможных инъективных отображений равно $(k)_n$.

1.5. *Определение.* Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным,* если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Количество таких отображений равно, очевидно, $n!$, где $n = |X| = |Y|$.

1.6. *Определение.* Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным, если

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Другими словами, отображение сюръективно, если каждый образ $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз $x \in X$.

Комбинаторная интерпретация сюръективного отображения такова: это есть некоторая раскладка n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Количество таких раскладок при $k > n$ равно, очевидно, нулю. Задача следующего пункта данного параграфа — сосчитать количество этих раскладок для случая $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. Обозначим через $\widehat{S}(n,k)$ количество всех сюръективных отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y. Сосчитаем $\widehat{S}(n,k)$ для случая $n \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

2.1. Рассмотрим множество *всех* отображений из n-множества X в k-множество Y. Как мы знаем, количество таких отображений равно k^n. Наша задача состоит в том, чтобы подсчитать это количество по-другому, выразив k^n через числа $\widehat{S}(n,k)$.

2.2. Заметим, что *любое* отображение $f : X \to Y$ можно рассматривать как *сюръективное* отображение множества X на множество

$$\mathfrak{I}(f) = \{y \in Y \,|\, \exists x :\ y = f(x)\},$$

являющееся образом множества X при отображении f.

2.3. `Пример.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, а отображение $f : X \to Y$ задается так:

$$f(x_1) = y_2, \qquad\qquad f(x_2) = f(x_3) = y_3.$$

В этом случае $\mathfrak{I}(f) = \{y_2, y_3\}$, а отображение $f : X \to Y$ является сюръективным отображением множества X на подмножество $\mathfrak{I}(f) \subset Y$.

2.4. Разобъем теперь все множество отображений $f : X \to Y$ на блоки, включив в i-й блок все отображения, образ $\mathfrak{I}(f)$ которых содержит ровно i элементов: $\mathfrak{I}(f) = i$, $i = 1, \ldots, k$. Все, что нам остается — это сосчитать количество элементов в каждом блоке, а затем воспользоваться правилом суммы для того, чтобы получить общее количество k^n всех отображений.

2.5. Заметим, что существует $\binom{k}{i}$ способов выбрать i-элементное подмножество k-множества Y. Для каждого из этих подмножеств имеется $\widehat{S}(n,i)$ различных сюръективных отображений из n-элементного множества X в выбранное i-элементное подмножество множества Y. Таким образом, по правилу произведения, общее количество элементов в i-м блоке равно

$$\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i).$$

Тогда по правилу суммы можем записать, что

$$k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i). \tag{7}$$

2.6. Мы выразили количество всех отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y через количество $\widehat{S}(n,i)$ сюръективных отображений. Нам же нужна обратная формула, выражающая количество $\widehat{S}(n,k)$ сюръективных отображений через число i^n всех отображений. Для ее получения воспользуемся так называемыми *формулами обращения.*

`Упражнение.` Пусть $(f_0, f_1, f_2, \ldots)$ и $(g_0, g_1, g_2, \ldots)$ — две числовые последовательности, и пусть одна из них выражается через вторую по формулам

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{8}$$

Доказать, что для таких последовательностей справедлива следующая формула обращения:

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \qquad k \geqslant 0. \tag{9}$$

2.7. С учетом этих формул обращения можно, считая n параметром, из соотношения (7) получить следующую явную формулу для вычисления чисел $\widehat{S}(n,k)$:

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \cdot i^n. \tag{10}$$

2.8. `Упражнение.` Вывести формулу (10) с помощью принципа включения-исключения.

2.9. *Замечание.* Формулу (7) полезно иногда записывать и в виде

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i), \tag{11}$$

причем эта формула справедлива как для случая $n \geqslant k$, так и для случая $n < k$. Действительно, в случае $n \geqslant k$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

за счет того, что биномиальные коэффициенты $\binom{k}{i} = 0$ для всех $i > k$. В случае же $n < k$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) + \sum_{i=n+1}^{k} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$$

уже за счет того, что при $i > n$ все числа $\widehat{S}(n,i) = 0$.

5 Подсчет количества разделений и упорядоченных разбиений n-элементного множества. Перестановки с повторениями

1. Задачи подсчета количества отображений n-элементного множества X в k-элементное множество Y имеют еще одну важную комбинаторную интерпретацию.

1.1. Начнем с примера. Для трехэлементного множества $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двухэлементного множества $Y = \{y_1, y_2\}$ имеется, как мы знаем, $2^3 = 8$ различных отображений множества X в множество Y. Запишем все эти отображения как упорядоченные пары вида

$$(\{x_1,x_2,x_3\},\varnothing), \qquad (\{x_1,x_2\},\{x_3\}), \qquad (\{x_1,x_3\},\{x_2\}), \qquad (\{x_2,x_3\},\{x_1\}),$$
$$(\{x_1\},\{x_2,x_3\}), \qquad (\{x_2\},\{x_1,x_3\}), \qquad (\{x_3\},\{x_1,x_2\}), \qquad (\varnothing,\{x_1,x_2,x_3\}).$$

Видно, что записанное в таком виде решение представляет собой не что иное, как список всех возможных *разделений* множества X на два (возможно пустых) блока.

1.2. Очевидно, что данный результат справедлив и в общем случае. Именно, любое отображение $f : X \to Y$ задает нам некоторое разделение множества X на k упорядоченных блоков, среди которых могут быть и пустые. Как следствие, количество таких разделений совпадает с количеством всех отображений f и равно k^n.

1.3. Аналогичные рассуждения показывают, что любое сюръективное отображение $f : X \to Y$ задает нам некоторое *упорядоченное разбиение* множества X на блоки. Поэтому количество всех упорядоченных разбиений n-элементного множества X на k блоков равно числу $\widehat{S}(n,k)$.

2. Рассмотрим теперь некоторый специальный вид k-разделений множества X, а именно, такие k-разбиения, в которых в первом блоке содержится a_1 элемент, во втором блоке — a_2 элемента,

в k-м блоке — a_k элементов. Очевидно, что при этом общая сумма всех элементов должна быть равна мощности $|X| = n$:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, \qquad a_i \geqslant 0.$$

2.1. **Утверждение.** Количество всех таких k-разделений n-множества X равно

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k}. \tag{12}$$

Действительно, в любом k-разделении n-множества X элементы, принадлежащие первому блоку X_1, $|X_1| = a_1$, могут быть выбраны $\binom{n}{a_1}$ способами. После выбора этих a_1 элементов элементы второго блока X_2, $|X_2| = a_2$ можно выбрать $\binom{n-a_1}{a_2}$ способами и так далее. Формула (12) теперь следует из правила произведения.

2.2. `Упражнение.` С использованием явной формулы для биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

показать, что

$$\binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!} := P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

2.3. Как уже отмечалось, общее количество всех k-разделений n-множества X равно k^n. Следовательно, суммирование чисел $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ по всем возможным a_i дает нам следующее полезное для дальнейшего соотношение:

$$k^n = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i \geqslant 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{13}$$

2.4. Если в условии рассматриваемой задачи заменить нестрогие неравенства $a_i \geqslant 0$ на строгие, т.е. на неравенства $a_i > 0$, то вместо разделения мы получим упорядоченное разбиение специального вида. Количество таких упорядоченных разбиений также описывается формулой (12), а вместо формулы (13) получается не менее полезное соотношение вида

$$\widehat{S}(n,k) = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n \\ a_i > 0}} \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_k!}. \tag{14}$$

3. Числа $P(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ имеют и другой комбинаторный смысл; именно, они перечисляют так называемые *перестановки n-множества X с повторениями.*

3.1. Рассмотрим следующую задачу: на полке имеются 15 различных книг по математике, 16 по информатике и 12 по физике; каково количество способов перестановки этих книг на полке? Ответ очевиден: $(15 + 16 + 12)! = 43!$ способов.

3.2. Предположим теперь, что мы перестали различать книги, посвященные одному и тому же предмету. В этом случае количество различных способов перестановки таких книг уменьшится.

Обозначим это количество через $P(43;15,16,12)$. Так как существует $15!$ способов упорядочить книги по математике, $16!$ – по информатике и $12!$ – по физике, то по правилу произведения мы можем записать, что

$$43! = P(43;15,16,12)\cdot 16!\cdot 15!\cdot 12! \qquad \Longrightarrow \qquad P(43;15,16,12) = \frac{43!}{16!\cdot 15!\cdot 12!}.$$

Это число и называется числом перестановок множества X, $|X| = 43$, с повторениями.

3.3. В общем случае, когда среди n предметов имеется a_1 неразличимых предметов первого сорта, a_2 неразличимых предметов второго сорта и так далее, мы для количества перестановок таких предметов с повторениями получаем уже знакомую нам формулу

$$P(n;a_1,a_2,\ldots,a_k) = \frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_k!}.$$

3.4. В частном случае перестановки n предметов двух различных сортов получаем

$$P(n;k,n-k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Иными словами, количество таких перестановок равно количеству различных k-элементных подмножеств n-элементного множества. Для комбинаторного доказательства данного факта достаточно установить биекцию между любым таким подмножеством и упорядоченной строкой длины n, состоящей из k элементов одного сорта, и $(n-k)$ элементов второго сорта.

3.5. Еще одна полезная биекция, связанная с числом перестановок с повторениями — это биекция, связанная с числами $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Именно, любому k-мультимножеству над n-множеством отвечает некоторая раскладка k неразличимых предметов по n различимым ящикам. Эту раскладку, в свою очередь, можно рассматривать как упорядоченную строку, состоящую из k предметов одного сорта (шаров), и $n-1$ предметов второго сорта — неразличимых перегородок между ящиками. Как следствие, количество всех k-мультимножеств

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = P(k+n-1) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

6 Раскладки различимых предметов по неразличимым ящикам. Числа Стирлинга второго рода

1. В конце предыдущего параграфа мы доказали, что количество всех упорядоченных разбиений n-множества на k блоков равно $\widehat{S}(n,k)$. Обозначим через $S(n,k)$ количество обычных, неупорядоченных разбиений n-множества на k блоков. Так как для любого неупорядоченного разбиения существует $k!$ способов упорядочить k его блоков, то числа $S(n,k)$ и $\widehat{S}(n,k)$ связаны между собой следующим простым соотношением:

$$\widehat{S}(n,k) = k!\,S(n,k).$$

Следовательно,

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}(k-i)^n = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_k=n\\ a_i>0}}\frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_k!}. \tag{15}$$

Числа $S(n,k)$ называются числами Стирлинга II рода. Исследуем эти числа поподробнее.

1.1. Заметим, что с точки зрения схемы раскладки предметов по ящикам числа Стирлинга II рода описывают количество способов разложить n различимых предметов по k неразличимым ящикам так, чтобы в любом ящике содержался хотя бы один предмет.

1.2. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $k = 2$. Перечислим все 2-разбиения множества X:

$$\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4\}\}, \quad \{\{x_1, x_2, x_4\}, \{x_3\}\}, \quad \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2\}\}, \quad \{\{x_2, x_3, x_4\}, \{x_1\}\},$$

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}, \quad \{\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}\}, \quad \{\{x_2, x_3\}, \{x_1, x_4\}\}.$$

Как видно, в данном случае $S(4,2) = 7$.

1.3. Для практического расчета чисел $S(n,k)$ удобно использовать рекуррентное соотношение

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k), \qquad k = 1, \ldots, n; \tag{16}$$

$$S(n,1) = 1, \qquad S(n,k) = 0 \ \forall\ k > n.$$

Для его доказательства разобьем множество Σ_k всех k-разбиений n-множества на два класса. К первому классу Σ_1 отнесем все разбиения, содержащие одноэлементный блок $\{x_n\}$. Ясно, что количество элементов в этом классе равно количеству $S(n-1,k-1)$ всех $(k-1)$-разбиений оставшегося $(n-1)$-элементного множества. Ко второму классу Σ_2 отнесем все оставшиеся k-разбиения, т.е. разбиения, в которых элемент x_n входит в подмножества, содержащие как минимум два элемента. По сути дела, это есть все возможные разбиения $(n-1)$-элементного множества на k блоков с поочередным добавлением элемента x_n в каждый из этих блоков. Поэтому количество элементов во втором классе равно $k \cdot S(n-1,k)$.

1.4. Числа Стирлинга II рода встречается в очень большом количестве самых разнообразных задач. В качестве примера вернемся к формуле (11) и перепишем ее через числа Стирлинга II рода:

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot k! \cdot S(n,k) = \sum_{i=0}^{n} (k)_i \cdot S(n,k).$$

Оказывается, эта формула справедлива для любых вещественных и даже комплексных значений k. Именно, справедливо равенство

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} (x)_i \cdot S(n,k).$$

Эта формула активно используется в теории конечных операторов; она позволяет перейти от базиса x^n к базису $(x)_n$.

2. Вернемся к комбинаторной интерпретации чисел $S(n,k)$, связанной с раскладкой предметов по ящикам.

2.1. Как уже отмечалось, числа Стирлинга II рода перечисляют количество способов разложить n различимых предметов по k неразличимым ящикам в случае, когда в любом ящике должен находиться хотя бы один предмет. Сосчитаем, зная $S(n,k)$, количество $B(n,k)$ различных раскладок n различимых предметов по k неразличимым ящикам в случае, когда ограничения на количество предметов в любом ящике отсутствуют.

2.2. Для этого вновь разобьем множество всех таких раскладок на блоки, поместив в i-й блок все раскладки, в которых занято ровно i ящиков. В случае различимых ящиков в процессе аналогичного разбиения множества на блоки мы в i-м блоке имели $\binom{k}{i} \cdot \widehat{S}(n,i)$ элементов. В случае неразличимых ящиков мы i из k ящиков выбираем ровно одним способом, а затем $S(n,i)$ способами заполняем эти ящики n предметами. В итоге, согласно правилу суммы, число

$$B(n,k) = \sum_{i=1}^{k} S(n,i).$$

2.3. Числа $B(n,k)$ в случае $n = k$ называются числами Белла $B(n)$. Эти числа перечисляют количество всех разбиений n-элементного множества X. Заметим, что любое разбиение X связано с некоторым введенным на этом множестве отношением эквивалентности. Как следствие, числа Белла перечисляют всевозможные отношения эквивалентности на множестве X.

3. Подведем итоги, построив таблицу различных схем раскладок n предметов по k ящикам:

Элементы множества X (предметы)	Элементы множества Y (ящики)	Произвольное количество предметов в ящике	Не более 1 предмета в ящике	Как минимум 1 предмет в ящике
различимые	различимые	k^n	$(k)_n$	$\widehat{S}(n,k)$
неразличимые	различимые	$\left(\!\binom{k}{n}\!\right)$	$\binom{k}{n}$	$\binom{k-1}{n-1}$
различимые	неразличимые	$B(n,k)$		$S(n,k)$

Как видно, остался еще один неразобранный вариант — схема размещения n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам. Для количества таких размещений явных аналитических формул не существует. Для того, чтобы их перечислить, необходимо использовать аппарат производящих функций, к изучению которого мы и приступаем в следующей главе.