Задания

24 марта 2017 г.

1. Пусть $F : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ab}$ – рефлектор вложения $i : \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$.
   (a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| = |X|$.
   (b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| < |X|$.
   (c) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X верно $|F(X)| < 2|X|$.
   (d) Приведите пример коммутативного моноида X, такого что $\eta_X : X \to i(F(X))$ – не сюръективна.

2. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

   Пусть $U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

   (a) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.
   (b) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

3. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$, сконструированного в предыдущем ДЗ, существует левый сопряженный.

4. Пусть **rGraph** – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины x выбрана петля id_x в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

   Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо **rGraph** можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

Докажите, что у функтора $\Gamma : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный $C : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$ и левый сопряженный $D : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$, и у D существует левый сопряженный $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$. Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:

$$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

5. Пусть $\mathbf{C}$ – произвольная категория. Если X – объект $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}/X$ – категория объектов над X. Объекты категории $\mathbf{C}/X$ – это морфизмы вида $A \to X$. Морфизмы в $\mathbf{C}/X$ из $f : A \to X$ в $g : B \to X$ – это морфизмы $h : A \to B$ в $\mathbf{C}$, такие что следующий треугольник коммутирует:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   Тождественные морфизмы и композиция определяются как соответствующие операции в $\mathbf{C}$.

   Существует функтор $\Sigma_X : \mathbf{C}/X \to \mathbf{C}$, сопоставляющий объекту $f : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект A в $\mathbf{C}$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют бинарные произведения, то у этого функтора существует правый сопряженный.

6. Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{C}$. Тогда можно определить функтор $\Sigma_f : \mathbf{C}_X \to \mathbf{C}_Y$, сопоставляющий объекту $g : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект $f \circ g$ в $\mathbf{C}/Y$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют пулбэки, то у этого функтора существует правый сопряженный.

7. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует объект $2 = 1 \amalg 1$, то он является булевским.

8. Докажите, что в любой декртово замкнутой категории $\mathbf{C}$ выполнены следующие утверждения:

   (a) Если в $\mathbf{C}$ существует начальный объект 0, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^0 \simeq 1$.

   (b) Если в $\mathbf{C}$ существует копроизведение $B \amalg C$, то для любого объекта A существует изоморфизм $A^{B \amalg C} \simeq A^B \times A^C$.

9. Докажите, что если в декартово замкнутой категории существует все копроизведения, то в ней существует объект натуральных чисел.