1. В последнем примере у нас K было фиксировано, менялось n и мы ответ получали просто суммируя коэф-ты при нужных нам степенях x^n. А вот что делать в случае, когда n фиксировано, а K – нет?

1) Пример. За пересылку бандероли нужно уплатить 18 рублей, наклеивая на нее марки. На почте есть марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей в неограниченном количестве. Сколькими способами можно оплатить пересылку бандероли, если 2 способа, отличающиеся количеством (т.е. числом K) или порядком (марки – различимые) наклеивания марок считаются различными?

а) Какие вар-ты $\exists$? Например

$$10+4+4=18;\quad 4+10+4=18;\quad 4+4+10=18;$$
$$4+6+4+4=18;\quad 6+4+4+4=18;\quad 4+4+6+4=18;\quad 4+4+4+6=18$$
$$6+6+6=18 \Rightarrow \text{всего 8 способов.}$$

Как это число получить без перебора всех вариантов?

б) Попытаемся составить для этой задачи рекурр. соотношение. Введем $F(n)$ – кол-во способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 р. так, чтобы общая их стоимость $= n$. Тогда справедливо следующее рекурр. соотношение:

$$F(n) = F(n-4) + F(n-6) + F(n-10). \quad (*)$$

Почему? Потому, что все мн-во вариантов наклейки марок я могу разбить на 3 блока:

1-й блок: последней была наклеена марка в 4 рубля
2-й блок: —//— 6 рублей
3-й блок: —//— 10 рублей

Ясно, что эти подслова — непересекаются, и их объединение дает нам все виды вариантов. Но: тогда число этих в 1-м блоке $= F(n-4)$, во 2-м — $F(n-6)$, в 3-м — $F(n-10)$ $\Rightarrow$ получаем (*)

<u>Начальные условия</u>: $F(0)=1$, $F(n)=0$ $\forall n<0$.

Используя это рекурр. соотнош, мы, конечно, сможем уже решить нашу задачу.

в) А можно ли ее решить с помощью производящих функций? Если действовать „в лоб", т.е. вводить обыкнов. произв. функц.

$$F(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \ldots,$$

домножать (*) на x^n и Σ по n от 0 до $+\infty$, то получим следующее:

$$(*) \Leftrightarrow F_{n+10} = F_{n+6} + F_{n+4} + F_n, \quad n \geq 0;$$

$$F_0=1;\ F_1=F_2=F_3=0;\ F_4=1;\ F_5=0;\ F_6=1;\ F_7=0;\ F_8=1;\ F_9=0$$

Домножая на x^{n+10} и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$, получим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+10} x^{n+10} = x^4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+6} x^{n+6} + x^6 \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+4} x^{n+4} + x^{10} f(x)$$

$$\Leftrightarrow F(x) - F_0 - F_1 x - \ldots - F_9 x^9 = x^4 \cdot (F(x) - F_0 - \ldots - F_5 x^5) + x^6 (F(x) - F_0 - \ldots - F_3 x^3) + x^{10} f(x)$$

$$\Leftrightarrow F(x) - 1 - x^4 - x^6 - x^8 = x^4 \cdot (F(x) - 1 - x^4) + x^6 (F(x) - 1) + x^{10} f(x)$$

$$\Rightarrow F(x) \cdot [1 - x^4 - x^6 - x^{10}] = 1 + x^4 + x^6 + x^8 - x^4 - x^8 - x^6 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{1-(x^4+x^6+x^{10})}}$$

г) Как тот же ответ получить проще? И, главное, как его обобщить на случаи других условий задачи?

Пусть $x^4+x^6+x^{10} =: f(x) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-f(x)} = 1 + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^k(x) + \ldots =$

$$= 1 + (x^4+x^6+x^{10}) + (x^4+x^6+x^{10})^2 + (x^4+x^6+x^{10})^3 + (x^4+x^6+x^{10})^4 + \ldots \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ коэфф-т при x^{18} даст ответ.

А что такое $f(x)$ и каков здесь комбинаторный 12
смысл всех этих действий? Если бы у нас число K
марок было бы фиксировано: мы бы решали задачу

$i_1 + i_2 + \ldots + i_k = n$;

~~Тогда~~: в роли ящика выступало бы место для $K^{\text{й}}$ марки.
В роли основной производящей функ у нас бы выступала
функ $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots$, где $a_i = 1$, если $i = 4, 6, 10$;
$a_i = 0$, в остальных случаях
и комбинаторный ее смысл был бы следующий:
взять марку $i^{\text{го}}$ достоинства и положить ее в ящик,
если $i = 4, 6, 10$, или не положить, если $i \neq 4, 6, 10$. Таких
ящиков K штук $\Rightarrow$ ответ давала бы функция

$$[f(x)]^K = (x^4 + x^6 + x^{10})^K.$$

У нас же K может быть $\forall$ $\Rightarrow$ для того, чтобы получить ответ для произвольного n, нам надо
просуммировать все такие производящие функ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f^k(x) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - (x^4 + x^6 + x^{10})}}$$

д) Обобщение: $\exists$ имеются ~~та~~ S марок достоинствами
в $i_1, i_2, \ldots, i_s$ рублей $\Rightarrow$

I. рекурр. соотнош.: $F(n) = F(n - i_1) + \ldots + F(n - i_s)$

II. произв. функ: $\boxed{F(x) = \frac{1}{1 - (x^{i_1} + x^{i_2} + \ldots + x^{i_s})}}$

е) Еще больше обобщим задачу: а если на почте
имеются ~~несколько~~ марки $\forall$ достоинства (1 руб., 2 руб., ...),
причем $\forall$ марка - в неограниченном кол-ве? В этом
случае $f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} f^k(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1-x)^k}=\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{1-x}{1-2x}=$$

$$=\frac{1-2x}{1-2x}+\frac{x}{1-2x}=1+\frac{x}{1-2x}=1+x+2x^2+4x^3+\ldots+2^{n-1}x^n+\ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{F_n=2^{n-1},}\ ,\ n>0;\quad F_0=1$$

ж) Разумеется, такой простой ответ можно получить и непосредственно, без использования произв. функц.: дело сводится к решению в целых <u>положительных</u> целых ур-ия

$$i_1+\ldots+i_k=n$$

для $\forall$ числа k. Но: при фиксированном k решение этой задачи известно: $\binom{n-1}{k-1}$ $\Rightarrow$ суммируя по всем k от 1 до n, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}+0=2^{n-1}.$$

---

2. Композиция обыкновенных произв. функций.

1) А сможем ли мы решить очень похожую задачу — поиска всех решений в <u>неотрицательных</u> целых ур-ия

$$i_1+\ldots+i_k=n \qquad (*)$$

при условии, что число k не фиксировано?

а) Сначала давайте будем действовать формально: производящая функция $f(x)$ в этом случае равна

$$f(x)=\underline{\underline{1}}+x+x^2+\ldots+x^i+\ldots=\frac{1}{1-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{-1+x}{x}=?$$

В знаменателе ~~этого производного~~ этой дроби стоит функция $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots=x$, т.е. функц. у кот. $b_0=0$. Но такая функция не имеет обратного элт-а с т. зрения теории формальных степенных рядов $\Rightarrow$?

б) В чём же причина неудачи? Дело в том, что само ур-е (*) при нефиксированном числе k имеет ∞-но много решений: ~~[illegible]~~ мы можем добавлять 0 в любом количестве в левую часть на $\forall$ позиции $\Rightarrow$ получать ∞-ное число решений.

в) А что ~~происходит~~ сходит в этом примере плохо с т. зрения производящих ф-ций? Рассмотрим производящую ф-цию

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots$$

По определению, положим ~~Давайте поймем,~~

$$F(x) = \frac{1}{1-f(x)} \overset{def}{=} 1 + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^k(x) + \ldots \qquad (*)$$

Когда это опр-е имеет смысл с т. зрения теории формальных степ. рядов?

~~Заметим, что если $f(x)$ содержит конечное число слагаемых, то $\forall$ ее степень вполне определена $\Rightarrow$ наша ф-ла имеет смысл.~~

Далее, $\exists$ $f(x)$ такова, что $a_0 = 0$. В этом случае: зафиксируем некоторое n $\Rightarrow$ ~~[illegible] слагаемых, содержащих x^n, будет конечное число~~ в правой части (*) слагаемых, содержащих x^n, всегда будет конечное число.

Действительно,

$$[f(x)]^k = (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^k = x^k \cdot (a_1 + a_2 x + \ldots)^k \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $k > n$ ~~[illegible]~~ любое $[f(x)]^k$ будет содержать степени $> n$. Таким образом, чтобы сосчитать ~~[illegible]~~ коэфф-т при x^n нам как максимум нужно возвести $f(x)$ в n-ю степень, а это ~~[illegible]~~ делать мы умеем даже для ∞-ных рядов.

А теперь предположим, что $a_0 \neq 0$. В этом случае любая степень $[f(x)]^k$ будет содержать слагаемое с x^n $\Rightarrow$ процесс определения коэф-та при x^n перестанет быть конечным $\Rightarrow$ правая часть (*) смысла не имеет. Итак, ~~коэф~~ наше определение имеет смысл лишь в случае, когда $a_0 = 0$.

2) Итак, мы подошли к следующему опред-ю. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots$ — обычнов. произв. ф-ция, в которой ~~либо содержится конечное число ненулевых слагаемых, либо в которой~~ $a_0 = 0$. Тогда ~~коэф~~ корректно определена обычнов. произв. ф-ция

$$h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \ldots = H(x) \overset{def}{=} \frac{1}{1 - f(x)} \overset{def}{=} 1 + f(x) + f^2(x) + \ldots + f^k(x) + \ldots \quad (1 =: f^0(x) =: h_0)$$

Каков комбинаторный смысл этой ф-ции? Пусть имеется линейно упорядоченное мн-во из n ~~элтов~~ различимых эл-тов (или мн-во из n ~~неразл~~ неразличимых эл-тов), и пусть a_n — кол-во способов совершить над ним какое-то комбинаторное действие. Предположим также, что ~~либо~~ $a_0 = 0$, ~~либо $\exists$ конечное число a_i, отличных от нуля~~. Тогда ~~число~~ h_n — это кол-во ~~способов~~ способов разбить n-мн-во на какое-то (не определенное заранее) число (k) попарно не пересекающихся непустых интервалов, а затем совершить на $\forall$ из этих интервалов размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами. ~~[неразборчиво]~~

$\forall k_0$ ~~$\left(\sum_{k=0}^{n} f^k(x)\right) =: F(x)$, $f^0(x) \overset{def}{=} 1 = h_0$~~

Заметим,

Заметим, что, в отличие от пример двух или k производящих функций, мы в разбиении не допускаем пустых интервалов. В противном случае ~~Опять-таки, если бы мы их допускали, то мы бы имели ∞ много способов разбить n-множ~~ бесконечным числом способов ~~число~~ т.к. мы бы могли вставить ~~столько~~ пустых интервалов ~~сколько захотим~~.

3) Пример. На площу стает в одну линию n солдат. Дежурный офицер разбивает этот строй на произвольное число k непустых отрядов (например, так: первые 3 солдата, следующие за ними 4 солдата, оставшиеся $n-7>0$ солдат). Затем он в каждом отряде назначает командира. Найти число h_n способов выполнить эту операцию

а) В этом случае (комбинат.) действие „выбрать командира" в отряде из i солдат м. б. сделано $a_i = i$ способами $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot x^i = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (a_0 = 0\,!)$$

б) Тогда

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{1-2x+x^2}{1-3x+x^2} = 1 + \frac{x}{1-3x+x^2}}$$

в) Пусть $(1-3x+x^2) = (1-\alpha x)(1-\beta x) = 1-(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 1 \\ \alpha+\beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 + 1 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt5}{2}.$$

Пусть $\alpha = \frac{3+\sqrt5}{2} \Rightarrow \beta = 3-\alpha = 3 - \frac{3+\sqrt5}{2} = \frac{3-\sqrt5}{2}$. Далее,

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} = \frac{A+B-\alpha B x - \beta A x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ \alpha B + \beta A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 1-B \Rightarrow \alpha B + \beta(1-B) = 0 \Rightarrow \cancel{2\alpha B + 3\alpha - 3B - \alpha = 0}$$

$$\Rightarrow \cancel{B = \frac{\alpha-3}{2\alpha+3} = \frac{3+\sqrt5-6}{2(3+\sqrt5+3)}} \Rightarrow B\cdot(\alpha-\beta) = -\beta \Rightarrow B\cdot\sqrt5 = \frac{\sqrt5-3}{2} \Rightarrow B = \frac{\sqrt5-3}{2\sqrt5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\sqrt5+3}{2\sqrt5} + 1 = \frac{\sqrt5+3}{2\sqrt5} \Rightarrow A = \frac{\alpha}{\sqrt5},\ B = \frac{-\beta}{\sqrt5} \Rightarrow F(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt5}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x} - \frac{\beta}{1-\beta x}\right) \Rightarrow \begin{cases} h_0 = 1, \\ h_n = \frac{1}{\sqrt5}(\alpha^n - \ldots \end{cases}$$

4) Опять-таки, простейшие примеры на эту тему связаны с задачами раскладки K неразличимых предметов по заранее неопределенному числу K (различимых) ящиков: здесь комбинаторное действие состоит в том, чтобы положить ($a_{i_m}=1$) или не положить ($a_{i_m}=0$) i_m предметов в $m^{\text{ый}}$ ящик.

---

5) Заметим, что формулу

$$h(x)=\frac{1}{1-f(x)} = 1+f(x)+f^2(x)+\dots+f^k(x)+\dots$$

можно рассматривать как композицию (или суперпозицию) двух функций: $h(x)=g(f(x))$, где $g(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$

С комбинаторной точки зрения это означает, что мы берем n-элементное множество, разбиваем его на некоторое, заранее не определенное число k непустых попарно непересекающихся интервалов, затем на каждом интервале совершаем некое комбинат. действие a_i способами. При этом никакого комбинаторного действия над множеством интервалов мы не совершаем ⇒

⇒ Обобщение: Пусть $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$, $b_0=1$; тогда композиция

$$h(x)=g(f(x))=1+b_1f(x)+b_2f^2(x)+\dots$$
$$h(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\dots,\quad h_0=1$$

есть число h_n способов разбить n-элементно упорядоченное множество на некоторое, заранее не определенное, число k непустых попарно непересекающихся интервалов, совершить на ∀ из интервалов размером i i-е комбинаторное действие a_i способами ($a_0 = 1$ или $a_i \neq 0$ для конечного числа i), а затем совершить 2е комбинаторное действие b_j способами над j-элементным множеством этих интервалов (различимых!)

6) Пример. На плацу стоят все те же n солдат. Но теперь командир разбивает их на некоторое, заранее не определенное число k непустых отрядов, а потом выбирает из них некоторое подмножество (возможно, пустое) ~~вновь сформированных~~ отрядов и отправляет их на дежурство $\Rightarrow h_n = ?$

1) Здесь: над отрядами он ничего не делает (тривиальное действие) $\Rightarrow a_0 = 0, \quad a_i = 1 \ \forall i \geq 1$.

Далее, $\exists \ b_j = 2^j$ способов выбрать подмножество из j-элементного множества.

Следовательно, $f(x) = \frac{x}{1-x}$; $g(x) = \frac{1}{1-2x} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1 - 2 \cdot \frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{1-3x} = 1 + \frac{2x}{1-3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_0 = 1, \quad h_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

2) А если бы он в $\forall$ отряде хотел бы назначить командира? Тогда бы

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1-2x} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{1 - \frac{2x}{(1-x)^2}} =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{1-4x+x^2} = 1 + \frac{2x}{1-4x+x^2} \Longrightarrow \ldots$$

5. А можно ли сформулировать аналогичное утверждение для экспоненц. произв. функц? Конечно, можно.

Th 1 (Экспоненциальная ф-ла). Пусть a_n – число способов совершить некот. комбинат. действие над n-элементным множеством; считаем, что $a_0 = 0$. Пусть h_n – число способов разбить (не упорядоченно, а просто) мн-во $[n] = \{1, .., n\}$ на (заранее неопределенное) число k непустых подмн-в, а затем на каждом из этих подмн-в совершить комбинат. действие a_{i_m} способами. Положим $h_0 = 1$. Обозначим через $F(x)$ и $H(x)$ соотв-вующие экспоненциальные производящие функции для послед-тей a_n и h_n. Тогда

$$H(x) = e^{F(x)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{F(x)}{1!} + \frac{F^2(x)}{2!} + \ldots$$

1) При фиксированном k: по опр-ию произв. экспоненц. произв. функций, $F^k(x)$ есть эксп. произв. функция для числа способов упорядоченного разбиения $[n]$ на ровно k подмн-в, а затем совершить комб. действие на них.

2) Т.к. эти мн-ва – непустые, то они все различны (эти – различимые!) $\Rightarrow \exists\, k!$ способов их упорядочить $\Rightarrow$

$\Rightarrow F^k(x)/k!$ – число способов разбить $[n]$ на k подмн-в, а затем...

---

6. Следствие. Из экспоненц. ~~произв~~ ф-лы следуют важные рекурр. соотнош-ия, позволяющие по a_n вычислять h_n и наоборот:

$$H'(x) = F'(x)\, H(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{h_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_k f_{n+1-k}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{f_{n+1} = h_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h_k f_{n+1-k}}$$

7. Пример. Сколькими способами можно разбить n людей на группы, а затем рассадить $\forall$ группу за круглыми столами?

• 1) $\exists$ $(k-1)!$ способов рассадить k людей за круглым столом

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)! \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \ln \frac{1}{1-x} \quad \left(\begin{matrix}\text{почему?}\\ \text{д-то}\end{matrix}\right)$$

2) Тогда, согласно эксп. ф-ле,

$$H(x) = e^{\ln\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n \geq 0} n! \frac{x^n}{n!} \Rightarrow h_n = n!$$

---

8. Th 2 (Композиционная ф-ла для эксп. произв. функций). Пусть a_n - кол-во способов совершить 1е комб. действие на n-элем. мн-ве, $a_0 = 0$; $\exists$ b_n — // — ; $\exists$ $b_0 = 1$. Пусть h_n - число способов разбить n-элем. мн-во на (заранее неопределенное) кол-во k непустых неупорядоченных блоков, совершить в $\forall$ блоке m комб. действие a_m способами, а затем совершить над этим мн-вом из k блоков 2е комб. действие $\Rightarrow$ если $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ - эксп. произв. ф-ии для a_n, b_n и h_n, то

$$H(x) = G(F(x)).$$

• Для фиксир. k: $b_k \frac{F^k(x)}{k!}$ способов $\Rightarrow \ldots$

---

9. Пример. Сколькими способами можно разбить n людей на группы, линейно упорядочить эти группы, а затем расположить их в циклическом порядке?

• 1) Здесь $a_n = n!$; $b_n = (n-1)! \Rightarrow F(x) = \sum n! \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$;

$$G(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} (n-1)! \frac{x^n}{n!} = 1 + \ln \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

2) $\Rightarrow H(x) = G(F(x)) = 1 + \ln \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 + \ln \frac{1-x}{1-2x} = 1 + \ln \frac{1}{1-2x} - \ln \frac{1}{1-x}$

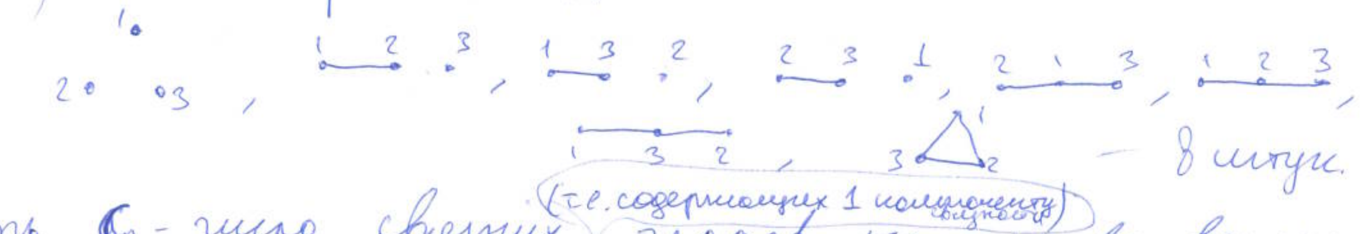
$$\Rightarrow h_n = 1,\ n = 0;\quad h_n = 2^n (n-1)! - (n-1)!,\ n > 0.$$

10. Комбинаторный смысл Th: многие структуры на мн-ве (графы, отношения частичного порядка) можно рассматривать как дизъюнктные (непересек.) объединения их связных компонент. Кроме того, на самих компонентах м.б. задана некот. доп. структура (задано комбин. действие). Тогда: если на мн-ве из i эл-тов имеется a_i связных структур, и $\exists\, b_k$ способов задать доп. структуру на k компонентах (совершить комб. действие), то h_n – это число всех структур на мн-ве из n элементов.

Если на k комп-ах нет никакой доп. структуры (никакое действие не задано), то $b_k = 1 \Rightarrow$ экспоненц. ф-ла.

11. <u>Важнейший пример</u> №1 Число всех графов (без петель и кратных ребер) на n-элтном мн-ве вершин S (т.е. <u>помеченных</u> графов) =, очевидно, $h_n = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$: $\forall$ из $\frac{n(n-1)}{2}$ <u>пар</u> вершин может соединяться или не соединяться ребром.

Например, $\exists\ 2^{\binom{3}{2}} = 2^{\frac{3(3-1)}{2}} = 2^3 = 8$ помеченных графов (не обязат. связных) с 3-мя вершинами:



– 8 штук.

Пусть a_n – число <u>связных</u> (т.е. содержащих 1 компоненту связности) графов на мн-ве вершин S. Тогда

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}_{=h_n} \frac{x^n}{n!} = \exp\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}\right]$$

а) Очевидно, $h_0 = 1$; $a_0 = 0$. Далее, $a_1 = 1$; $h_1 = 1$;

б) Далее, $a_2 = 1$, $h_2 = 2$:

в) Наконец, $a_3 = 4$, $h_3 = 8$. Тогда:

$$a_3 = h_3 - \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k} h_k a_{3-k} = 8 - 2 \cdot \underbrace{h_1}_{1} \underbrace{a_2}_{1} - 1 \cdot h_2 \cdot a_1 = 8-2-2=4$$

г) Таблица: $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 4$; $a_4 = 38$; $a_5 = 728$; $a_6 = 26\,704$;
$a_7 = 1\,866\,256$; $a_8 = 251\,548\,592$; $a_9 = 66\,296\,291\,072$