Задание 11 (на 23.11).

Пусть I_1 и I_2 — две интерпретации одной сигнатуры. Мы говорим, что I_1 является расширением I_2, если M_1 (носитель I_1) является надмножеством M_2 (носителя I_2), все функциональный и предикатные символы согласованы на M_2. Говорят, что это расширение является элементарным, если любая (не обязательно замкнутая формула) на любой оценке свободных переменных, принимающих значения в M_2 одновременно истинна и ложна в интерпретациях I_1 и I_2.

ML 53.

а) Покажите, что естественные интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.

б) Для двух алгебраически замкнутых полей k_1 и k_2 характеристики 0 выполняется, что k_1 является надполем поля k_2. Покажите, что естественная интерпретация $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_1 является элементарным расширением естественной интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_2.

в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.

г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены $Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum\limits_i Q_i P_1 = 1$.

ML 54. Покажите (в случае пропозициональных формул), что если $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash F$, то формула $(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} F_i) \to F$ является тавтологией.

ML 55. Покажите, что для любых пропозициональных формул A, B и C формула $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ является выводимой.

ML 56. Покажите, что если формула ϕ является, то и формула, которая получится при подстановке другой формулы вместо переменной формулы ϕ, тоже будет выводимой.

ML 57. Покажите, что следующие формул являются выводимыми:

а) $A \to \neg\neg A$ и $\neg\neg\neg A \to \neg A$;

б) $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ и $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$;

в) $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge C)$ и $((A \vee B) \wedge C) \to ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$;

г) $((A \vee C) \vee (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$ и $((A \wedge B) \vee C) \to ((A \vee C) \vee (B \vee C))$;

д) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

ML 58. Заменим 11-ую аксиому $A \vee \neg A$ на $\neg\neg A \to A$. Покажите, что множество выводимых формул не изменится.

ML 51. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, =, <)$. А будут ли эти интерпретации изоморфны?

ML 52. Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:

а) $(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}, =, <)$;

б) $(\mathbb{Q}+\mathbb{R}, =, <)$.