Домашнее задание по эйлеровым путям и циклам с 15.09.2017 на 29.09.2017

Для немедленного зачёта по теме достаточно набрать **7** баллов.

1. (0,5 балла) Верно ли, что в эйлеровом графе для любых двух ребер e_1 и e_2, инцидентных одной и той же вершине, обязательно найдется хотя бы один эйлеров цикл, в котором два эти ребра идут одно за другим?

2. (1 балл) Доказать, что в любом связном графе G найдется маршрут, который проходит по каждому из ребер графа G как максимум два раза.

3. (1 балл) Рассмотрим квадратную сетку, состоящую из $5 \cdot 5 = 25$ вершин, соединенных между собой сорока ребрами. Можно ли покрыть эту сетку пятью ломаными длины 8? А восемью ломаными длины 5?

4. (1 балл) Реберным графом $L(G)$ графа G называется граф, в котором любая вершина x' отвечает некоторому ребру $e \in E(G)$ графа G, и в котором две вершины смежны между собой тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра в графе G инцидентны одной и той же вершине. Доказать, что в случае регулярного связного графа G его реберный граф $L(G)$ является эйлеровым.

5. (1 балл) Рассмотрим связный простой регулярный граф G, степень любой вершины которого равна четырем. Доказать, что ребра этого графа всегда можно покрасить в два цвета (красный и синий) так, чтобы любая вершина была инцидентна ровно двум синим и ровно двум красным ребрам.

6. (1 балл) Рассмотрим еще один алгоритм поиска эйлерова цикла в связном эйлеровом графе G. Разобъем в каждой вершине графа инцидентные ей ребра на пары. Затем, начиная с какого-то ребра e, построим некоторый путь в графе G следующим образом: если мы вошли в вершину по одному из парных ребер, то выйти мы должны из нее по другому парному ребру. Завершится этот путь в ребре e', парном к e. В результате мы разобъем все множество ребер графа G на попарно непересекающиеся замкнутые пути $T_1, \ldots, T_k$, объединение которых даст нам все множество $E(G)$. В случае, если таковых оказалось два или более, последовательно объединим эти пути в один следующим образом: найдем среди этих замкнутых путей пару путей T_i и T_j, имеющих общую вершину x, и объединим эти пути в путь $T = T_1 \cup T_2$ большей длины, поменяв парность ребер в вершине x. Доказать корректность данного алгоритма, а именно, показать, что по его завершению мы получим эйлеров цикл в графе G.

7. (2 балла) Рассмотрим эйлеров граф без петель. Удалим в нем ребро $e = \{x, y\}$. Доказать, что количество $\{x, y\}$-путей (не обязательно простых, trails), в которых вершина y встречается только в конце каждого из этих путей, нечетно.

   В качестве примера можно рассмотреть граф "бабочка состоящий из двух треугольников $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$, склеенных в точке 3. Удалив в таком графе ребро $\{1, 2\}$, получаем три пути, соединяющих 1 и 2: один — простой путь $(1, 3, 2)$; два — пути, не являющиеся простыми (trails): $(1, 3, 4, 5, 3, 2)$; $(1, 3, 5, 4, 3, 2)$.

   Доказать, что количество таких путей, не являющихся простыми, обязательно четно.

8. (1,5 балла) Пусть в графе G имеется вершина x нечетной степени. Доказать, что среди инцидентных x ребер найдется ребро e, для которого количество различных циклов, проходящих через e, четно.

9. (1 балл) С использованием двух предыдущих упражнений доказать справедливость еще одной характеризации эйлерова графа: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждое его ребро e принадлежит нечетному количеству циклов в G.

10. (1,5 балла) Найти одну из последовательностей де Брейна $B(3,3)$ длины 27, построив предварительно орграф на девяти вершинах, в котором последовательности $B(3,3)$ отвечает эйлеров цикл.