

30 ноября 2017

1. Приведите к КНФ и ДНФ следующие функции:

(a) $(x \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge z)$

(b) $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$

2. Булева функция $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ называется монотонной, если при $x \leq y$ выполняется $f(x) \leq f(y)$ ($x \leq y$, если для всех $1 \leq i \leq n$ выполняется $x_i \leq y_i$).

(a) Докажите, что если пропозициональная формула использует только связки \vee и \wedge , то задаваемая ей булева функция монотонна.

(b) Докажите, что монотонную булеву функцию можно записать в виде формулы, которая использует только связки \vee и \wedge .

3. (a) Приведите пример булевой функции n аргументов, у которой любая дизъюнктивная или конъюнктивная нормальная форма содержит лишь члены длины n .

(b) Опишите все такие функции.

4. Найдите все такие *бинарные* связки, что с их помощью можно выразить любую булеву функцию.

5. Докажите, что система связок \neg, \rightarrow полна.

6. Пусть формула $\phi \rightarrow \psi$ является тавтологией. Докажите, что найдется такая формула τ , которая содержит только общие для ϕ и ψ переменные, что формулы $\phi \rightarrow \tau$ и $\tau \rightarrow \psi$ являются тавтологиями.

7. Две формулы, содержащие только переменные и связки \vee, \wedge и \neg эквивалентны. Докажите, что они останутся эквивалентными, если всюду \vee заменить на \wedge и наоборот.