6. Задачи раскладки предметов по ящикам и производящие функции.

1. Итак, перейдём теперь к давно обещанным методам решения задач о раскладке предметов по ящикам с помощью производящих функций. И начнём мы снова с задач раскладки различимых предметов по различимым ящикам.

1) Прежде чем переходить к этим задачам вспомним ещё раз комбинаторный смысл произв. пары экспоненц. произв. функций. Формальное

Опр-е Пусть у нас имеется пара эксп. произв. функций

$$F(x) = a_0 + a_1\frac{x^1}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \ldots;\quad G(x) = b_0 + b_1\frac{x^1}{1!} + b_2\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Произв. этих функций наз. форм. степ. ряд вида

$$H(x) = F(x)\,G(x) := c_0 + c_1\frac{x^1}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \ldots, \text{ где}$$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a_i b_{n-i}.$$

$= \sum_{\substack{i_1+i_2=n\\ 0\le i_1,i_2\le n}} \Rightarrow$ число решений: $\left(\!\binom{2}{n}\!\right) = \binom{n+1}{n} = n+1$

Комбинаторный смысл этой операции следующий: мы берём мн-во из n различимых элементов и разбиваем его на 2 (упорядоченных) блока — на 2 (упорядоченных) ~~одномоментно~~ непересекающихся подмн-ва (пустые подмн-ва — допускаются) объединение которых даёт нам все мн-во (т.е. разбиение X на 2 блока)

$\{1,3\}\cup\{2,4,5\} \neq \{2,4,5\}\cup\{1,3\}$

Пусть теперь a_n — это кол-во способов совершить какое-то действие 1 на n-элтном мн-ве (упорядочить его, выбрать какое-то подмн-во, ...); b_n — это кол-во способов совершить какое-то другое действие 2 на n-мн-ве. Наконец, пусть c_n — это число способов разбить n-мн-во на 2 блока произвольным образом (т.е. число элтов в блоках м.б. $\neq$), над 1-м блоком совершить комбинат. действие 1, а над 2-м — действие 2. Очевидно тогда что

$$c_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a_i b_{n-i}:$$

и $\binom{n}{i}$ способами выбираю ~~..~~ элты 1-го блока ($\Rightarrow$ ~~..~~ элты оставшиеся, 2-го блока ...

затем a_i способами совершаем 1е действие над этими (i) 1-го блока, b_{n-i} способами — над этими 2-го $\Rightarrow$ всего имеем по правилу прои $a_i b_{n-i}$ вариантов.
Теперь, меняя i от 0 до n, получаем общее кол-во способов C_n. (т.к. размеры блоков не фиксированы)

2) Обобщение на случай прои K экспоненц. произв. функций:

$$H(x)=F_1(x)\cdot\ldots\cdot F_K(x)=\sum C_n\frac{x^n}{n!},\quad \text{где}$$

$$C_n=\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n\\0\le i_m\le n}}\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\ldots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}{i_K}a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}=$$

$$=\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n\\0\le i_m\le n}}\frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_K!}a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_K}$$

Комбинаторный смысл: разбиваем n-множество на K упорядоченных блоков (т.е. разрезаем n-мн-во) (среди кот. м.б. пустые), совершаем в 1м из них 1е комб. действие a_{i_1} способами, во 2м — a_{i_2} способами, ..., а в Kм — a_{i_K} способами. При этом число в-тов выбора i_1 эл-тов 1го блока из n-мн-ва $=\binom{n}{i_1}$; число в-тов выбора i_2 эл-тов 2го блока из оставшегося $(n-i_1)$-мн-ва $=\binom{n-i_1}{i_2}$, ...; эл-ты последнего блока выбираются

$$\binom{n-i_1-\ldots-i_{K-1}}{i_K}=\binom{i_K}{i_K}=1 \text{ способом, т.е. однозначно.}$$

Суммируя теперь по всем возможным разбиениям числа n: $n=i_1+\ldots+i_k$, мы и получаем число C_n.

---

3) Какое все это имеет отношение к задачам раскладки различимых предметов по ящикам?
Самое прямое. Именно: рассмотрим вначале задачу о раскладке n различимых предметов по K различимым

а) Рассмотрим вначале простейший случай e^{2x} [3]

различимых ящиков. Пусть у нас имеется n различимых предметов. ~~Тогда~~ Так вот, разложить эти n предметов по 2-м ящикам без ограничений на кол-во предметов в ящике - это то есть: разделить мн-во предметов на 2 блока, состоящие из k и $(n-k)$ элтов соотв-венно, положить элты 1-го блока в 1-й ящик, а элты второго - во второй. При этом и то, и другое действие я совершаю одним способом (положив предметы в ящик), т.е. здесь

$$a_k = b_{n-k} = 1 \implies$$

$$\implies \text{мы имеем} \quad c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1 \cdot 1 = 2^n.$$

Что этот результат означает на языке экспоненц. произв. функц? В этом случае мы имеем произв. простейших эксп. произв функц: $e^x \cdot e^x$. Коэф-ты при $\frac{x^n}{n!}$ у этих функц $=1$, и их комбинат. смысл - следующий (и самый простейший): взять n предметов и положить их в ящик. Далее,

$$e^x \cdot e^x = e^{2x} = 1 + 2\frac{x^1}{1!} + 2^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + 2^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \implies$$

$\implies$ общее число способов раскладки n различимых предметов по 2-м различимым ящикам $= 2^n$.

б) А что у нас будет в случае K ящиков? Да все то же самое: все $a_{k_m} = 1$,

$$c_n = \sum_{k_1+\ldots+k_K=n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_K!} = K^n.$$

На языке экспоненц. произв. функц:

$$e^x \cdot \ldots \cdot e^x = e^{Kx} = 1 + K\frac{x^1}{1!} + \ldots + K^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \implies$$

Иными словами, e^{Kx} есть эксп. произв. функция для кол-ва раскладок n различимых предметов по K различимым ящикам.

4) Теперь перейдем к чуть более сложным задачам ~~пф~~ — задачам о раскладке различимых предметов по различимым ящикам при наличии каких-то ограничений на кол-во предметов в i-м ящике.

а) Начнем опять с простейшего случая 2-х ящиков и с задачи при наличии след. ограничения: мы можем положить в $\forall$ ящик не более 1 предмета.

Формально: $\exists$ у нас имеется n предметов. Опять $\binom{n}{k}$ способами разделим его на 2 блока. Но теперь: что у нас теперь такое a_n и b_n (или: a_k и b_{n-k})? Очевидно, что если у нас в блоке 1 или 0 предметов, то мы можем их положить в ящик. Если же у нас — более 1 предмета в блоке, то их мы в ящик положить (по условию задачи) уже не можем $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = b_n = \begin{cases} 1, & n = 0, 1; \\ 0, & n > 1 \end{cases}$$

Что это означает с т. зрения производящих функций

$$F(x) = 1 + 1\cdot\frac{x^1}{1!} + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots;\quad G(x) = 1 + 1\cdot\frac{x^1}{1!} + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = F(x)\cdot G(x) = \left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right) = 1 + 2\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{1!} =$$

$$= \underset{(2)_0}{1} + \underset{(2)_1}{2}\cdot\frac{x^1}{1!} + \underset{(2)_2 = 2\cdot(2-1) = 2}{2}\cdot\frac{x^2}{2!} \Rightarrow c_0 = 1,\ c_1 = 2;\ c_2 = 2;\ c_n = 0\ \forall n > 2.$$

$\Rightarrow$ мы получили ответ! Причем получили его сразу для всех возможных случаев! $\boxed{c_n = (2)_n.}$

б) А что в случае k различимых ящиков? Опять

$$a_{im} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_m = 0 \text{ или } 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$(k)_n = k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)$

$(k)_0 \overset{def}{=} 1;\ (k)_1 = k,\ (k)_2 = k\cdot(k-1).$

На языке произв. функций:

$$H(x) = \underbrace{F(x)\cdot\ldots\cdot F(x)}_{k\text{ штук}} = \underbrace{\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{x^1}{1!}\right)}_{k\text{ штук}} = 1 + k\cdot\frac{x^1}{1!} + k(k-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + (k)_k\frac{x^k}{k!} + 0$$

$(1+x)^k = \sum^{k} \binom{k}{n} x^n = \sum^{k} (k)_n \ldots$

в) А теперь заметим, что мы можем таким образом решать самые разнообразные задачи, ~~связ~~ при наличии $\forall$ ограничений на кол-во предметов в ∀-м ящике! Эти ограничения легко определяются заданием коэф-ов a_{im} в m-й экспоненц. произв. функ.

5) Пример Найти количество способов, описывающих размещение n различных человек по трём различным аудиториям при условии, что в 1-ой аудитории могут находиться не более 4-х человек, во 2-й – не более 5-ти, а в 3-й – не более 8 человек.

$$F(x) = \left(1 + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} + 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^4}{4!}\right) \cdot \left(1 + \ldots + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 + \ldots + \frac{x^8}{8!}\right) \Rightarrow c_n = \ldots$$

---

6) Давайте тогда справимся с задачей подсчёта всех сюръективных отображений.

а) Это – задача раскладки различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике должен находиться хотя бы один предмет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это означает, что $a_0 = 0$; $a_1 = a_2 = \ldots = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow H(x) = (e^x - 1)^k \underset{\text{бином Ньютона}}{=} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} e^{(k-i)x}$$

б) Теперь: $e^{(k-i)x} = 1 + (k-i)x + (k-i)^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + \ldots + (k-i)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow H(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} (k-i)^n \cdot \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \hat{S}(n,k) \Rightarrow c_n = \hat{S}(n,k).$$

---

7) Наконец, давайте поймём как это связано с урновыми схемами.

а) Урновая схема, еще раз: у нас имеется n различных позиций; на $\forall$ из них я могу поставить один и только один из предмет. из Всего имеются k различных видов таких предметов. Как здесь трактовать правило произв. эксп. произв. функций?

$n = i_1+i_2+\ldots+i_k$, $0 \le i_m \le n$ $\forall$

Мы разделяем n-элтное мн-во на k (различных) блоков (позиций), и комбинаторное действие состоит в том, чтобы поместить (i_m) ровно i_m предметов предметы m-го вида! в этот m-й блок (размером i_m) (т.е. на i_m мест) $\Rightarrow a_{i_m}=1$. Это — в случае отсутствия ограничений на количество предметов m-го типа в m-м блоке.

Пример: битовая строка из n позиций: разделяем строку на 2 блока всеми возм. способами, а затем в 1-й блок помещаем 1-цы, во 2-й — нули $\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 1\cdot 1=2^n \iff \left(1+\frac{x^1}{1!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x^1}{1!}+\ldots\right)=e^x e^x=e^{2x}$$

б) Если есть ограничения: регулируем их выбором a_m.

Пример. ~~В урне имеется неограниченное кол-во красных, синих, белых и зеленых шаров. Найти кол-во способов выбора цифр 0, 1, 2, 3.~~ Имеется алфавит из 4-х букв: a, b, c, d. Сколько слов длины n из них можно составить, при условии, что в слове ~~обязат.~~ должно встречаться как минимум 2 буквы a и 1 буква c?

Ответ:
$$\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x^1}{1!}+\ldots\right)\left(\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\right)\left(1+\frac{x^1}{1!}+\ldots\right)=$$
$$=(e^x-1-x)\cdot e^{2x}\cdot(e^x-1)$$

Идея: разделяем слово из n букв на 4 блока (порядок блоков — важен!), затем: в 1-й блок размером i_1 помещаем i_1 букв a; во 2-й блок размера i_2 помещаем букву b, в 3-й — " — i_3 — " — c, в 4-й — " — i_4 … d.

2. Перейдём теперь к задаче раскладки n неразличимых предметов по k различимым ящикам.

1) Здесь нам понадобится комбинаторный смысл прои. обыкновенных произв. функций.

Опред. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$ — пара обыкнов. произв. функций. Произв. этих функций наз. обык. форм. степ. ряд вида

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots,\ \text{где } c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}.$$

2) Комбинаторный смысл: мы берём линейно упоряд. мн-во, разбиваем его на 2 блока произвольным образом, затем в 1-м блоке совершаем 1е комбинаторное действие a_i способами, во 2-м — 2е комбинат. действие b_{n-i} способами. Тогда: кол-во способов это сделать при фиксир. числе i эл-тов в 1-м блоке $= a_i\cdot b_{n-i}$ в силу линейной упорядоченности ⇒ меняя i в диапазоне от 0 до n, получаем полное кол-во способов совершить указанное действие, и оно $=c_n$

3) У нас в задаче раскладки предметов по ящикам, имеется частный случай лин. упор. мн-ва — это мн-во неразличимых эл-тов (шаров): если эти мн-ва неразличимы, то мы лишь одним способом (его разбиения на 2 подмн-ва однозначно задаётся числом i эл-тов в 1-м подмн-ве) можем разбить его на 2 подмн-ва, одно из кот. содержит i эл-тов, а 2е — $n-i$ эл-тов.

Затем в силу отсутствия ограничений на кол-во эл-тов в ∀ ящике: мы вновь $a_i=1$ способом кладём выбранное кол-во i шаров в 1й ящик, $b_{n-i}=1$ способом кладём оставшиеся $(n-i)$ шаров во 2й ящик ⇒

$$\Rightarrow\ c_n=\sum_{i=0}^{n}1\cdot1=(n+1)$$

На языке производящих функций:

$f(x)=1+x+x^2+\dots=\frac{1}{1-x}$; $h(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n$

$g(x)=1+x+x^2+\dots=\frac{1}{\dots}$

4) В случае k ящиков и отсутствии ограничений:

$$h(x)=\frac{1}{(1-x)^k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\binom{k}{n}\right)x^n.$$

5) В случае, если имеются ограничения на число элтов в ящиках:

а) В $\forall$ ящике не более 1 шара:

$$h(x)=(1-x)^k=\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x^n$$

б) В $\forall$ ящике хотя бы 1 шар:

$$h(x)=(x+x^2+\ldots)(x+x^2+\ldots)\ldots(x+x^2+\ldots)=\frac{x^k}{(1-x)^k}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{n}x^{n+k}=\left|\begin{array}{l} n+k=i \\ n=i-k \\ n=0..+\infty \Rightarrow i=k..+\infty \end{array}\right|=\sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i-1}{i-k}x^i=$$

$$=\sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i-1}{k-1}x^i.$$

в) Произвольные ограничения:

$$(1+x+x^2)\cdot(1+x)\cdot(x+x^2+\ldots)=\frac{(1+x+x^2)(1+x)x}{1-x}\ldots$$

6) Урновые схемы: имеется урна в кот. имеются 4 красных шара, 5 синих и 2 зеленых. Сколько $\exists$ способов выбрать n шаров из урны?

$$h(x)=(1+\ldots+x^4)(1+\ldots+x^5)(1+x+x^2)=\ldots$$

А если обязат. должен присутствовать хотя бы один красный шар?

$$h(x)=(x+\ldots+x^4)\ldots$$

7) Т.е. идея: схема размещения: мы разбиваем различимых множество n неразличимых элементов на k блоков так, что размер 1-го блока $=i_1$, размер 2-го блока $=i_2$, ..., размер k-го блока $=i_k$, причем

$$i_1+i_2+\ldots+i_k=n,$$

а затем i_1 предметов входят $(a_1=1)$ или не входят $(a_1=0)$ в 1-й ящик...

Схема урновая: в урне имеются k различимых предметов. Мы берем линейно упорядоченное n-множество (линейно упорядоченное по времени: выбираем в него эти k типов так: сначала

и производим следующие действия: мы разделяем разбиваем это мн. упорядоченное по времени множество на k блоков, затем в 1-й блок помещаем (если $a_{i_1}=1$) или не помещаем (если $a_{i_1}=0$) эти 1-го типа, во 2-й блок - предметы 2-го типа, ..., в k-й - k-го
(т.е.: в 1-й блок размером i_1 - i_1 предметов одного, 1-го типа - единств. способом, если можем)

~~в) Случай, когда число k разбиений не фиксировано.~~

8) Напомним, что задача размещения n неразличимых предметов по k различимым ящикам эквивалентна задаче о разделении числа n на k слагаемых; $n = i_1 + \ldots + i_k$ в ~~натур~~ неотрицат. числах
т.е. на решении урав

в случае, когда порядок следования слагаемых учитывается. Почему?

Да потому что это $\Leftrightarrow$ тому, что мы помещаем в 1-й ящик i_1 единицу, во 2-й - i_2 единиц, ..., в k-й - i_k единиц $\Rightarrow$ получаем число n. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пример: Поступающий в университет должен сдать 4 различных экзамена. Сколько есть вариантов успешно сдать экзамены и поступить, если проходной балл $= 17$?

а) В этой задаче $i_1+i_2+i_3+i_4=n$, где $n=17,18,19,20$. Далее, $a_i=1$, если $i=3,4,5$; $a_i=0$, если $i=0,1,2,6,7,8,\ldots$
$\Rightarrow f(x) = (x^3+x^4+x^5)^4 \Rightarrow$ нужно найти коэфф-ты при $x^{17}, x^{18}, x^{19}, x^{20}$ и затем просуммировать их.

б) Проще всего действовать так:

$$f(x) = x^{12}\cdot(1+x+x^2)^4 = x^{12}\cdot\left[\frac{(1-x^3)}{(1-x)}\right]^4 = \frac{x^{12}\cdot(1-x^3)^4}{(1-x)^4} = \frac{x^{12}(1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12})}{(1-x)^4} =$$

$$= x^{12}\cdot(1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12})\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+3}{n}x^n = (1+4x+10x^2+20x^3+\ldots) =$$

$$= \ldots + 16x^{17} + 10x^{18} + 4x^{19} + x^{20} + \ldots \Rightarrow \text{ответ: } 16+10+4+1 = 31 \text{ способ}$$