

21 сентября 2017

1. Сколько существует трехзначных чисел в пятеричной системе исчисления, в которых все три цифры различны?
2. Сосчитать количество способов раскладки k неразличимых предметов по n различным ящикам при условии, что в каждом ящике должен находиться как минимум один предмет.
3. Сосчитать количество размещений n различных предметов по k различным ящикам при условии, что ровно r из k ящиков должны быть заняты.
4. Подсчитать количество упорядоченных размещений k различных предметов по n различным ящикам, то есть таких размещений, в которых важен порядок размещения предметов в каждом конкретном ящике.
5. Доказать, что количество способов раскладки n различных предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится не более одного предмета, равно 0 в случае $n > k$ и 1 в случае $n \leq k$.
6. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слов а) “математика”; б) “комбинаторика”?
7. Сколькими способами можно из 60 различных грибов сделать четыре неразличимые связки по пятнадцать грибов в каждой?
8. Доказать формулы обращения

$$f_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} g_i \Leftrightarrow g_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i, \quad k \geq 0$$

9. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Доказать комбинаторно, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$

10. Найти рекуррентную формулу для вычисления чисел $F(n)$, введенных в предыдущем упражнении.
11. Получить явные аналитические выражения для чисел Стирлинга $S(n, 1)$, $S(n, n)$, $S(n, 2)$ и $S(n, n-1)$.
12. Доказать, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле

$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}$$

13. Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.