# Жорданова форма

Теория, связанная с жордановой формой, основывается на предположении, что все корни характеристического многочлена оператора лежат в базовом поле $K$. Поэтому при построении теории часто используется предположение, что поле $K$ алгебраически замкнуто. Итого, все поля, если не оговорено противное, алгебраически замкнуты.

**Факт.** Пусть $A\colon V \to V$ оператор. Рассмотрим $v_i$ — собственные векторы с собственными числами $\lambda_i$, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$. Тогда $v_i$ линейно независимы.

**Факт.** В частности, если характеристический многочлен оператора не имеет кратных корней, то существует базис $v_1, \ldots, v_n$, где $v_i$ — собственные векторы. Матрица оператора в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Введём определение, которое нам ещё пригодится

**Определение 1.** Пусть $A\colon V \to V$ — оператор на пространстве $V$ над не обязательно алгебраически замкнутым полем. Подпространство $U$ называется инвариантным (относительно $A$), если $A(U) \leq U$. Таким образом оператор $A$ можно ограничить на инвариантное пространство $U$.

**Определение 2.** Матрица $k \times k$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

называется жордановой клеткой размера $k$ с собственным числом $\lambda$.

**Теорема.** Пусть $A\colon V \to V$ — оператор на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем $K$. Тогда существует базис $v_1, \ldots, v_n$ в котором матрица $A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Собственные числа в клетках и их размеры могут повторяться. Число клеток данного размера с данным собственным числом $\lambda$ определено оператором $A$ однозначно. Такая матрица называется матрицей оператора $A$ в форме Жордана. Соответствующий базис называется жордановым базисом.

Как понять сколько клеток какого размера?

**Факт.** Кратность собственного числа $\lambda$ (как корня характеристического многочлена) равна сумме размеров клеток с собственным числом $\lambda$.

Рассмотрим оператор $A - \lambda E$. Понятно, что сколько клеток с $\lambda$ было у $A$, столько же леток с с.ч. 0 будет у $A - \lambda E$. Заметим, что жордановы клетки с собственным числом 0 являются нильпотентными матрицами.

Итак, пусть кратность собственного числа $\lambda$ равна $k$. Тогда оператор $A$ задаёт разбиение $k$ на ненулевые слагаемые, соответствующие размерам жордановых клеток с собственным числом $\lambda$. Любое разбиение числа $k$ на слагаемые можно (единственным образом) представить в виде следующей картинки:

Такие картинки (или перевёрнутые) называются диаграммами Юнга (Young diagram).

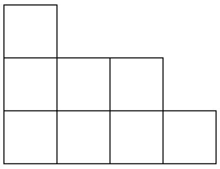

Рис. 1. $k = 8 = 3 + 2 + 2 + 1$, соответствует одной клетке размера 3, двум клеткам размера 2, одной клетке размера 1.

Пусть $v_1, \dots, v_n$ жорданов базис и пусть все клетки с с.ч. $\lambda$ стоят вначале. Понятно, что вектора $v_1, \dots, v_k$ образуют базис пространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)^k$ (на самом деле часто можно возводить и в меньшую степень). Пространство $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)^k$ является инвариантным подпространством в $V$. Сузим наш оператор на это пространство. Впишем в клетки диаграммы Юнга базисные вектора $v_1, \dots, v_k$ следующим образом:

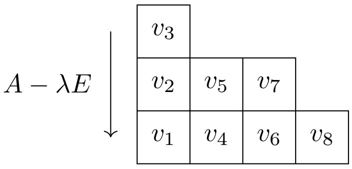


Рис. 2. $8 = 3 + 2 + 2 + 1$, расставляем базисные вектора

Теперь наш нильпотентный оператор $(A - \lambda E)$ занимается тем, что двигает векторы по столбикам вниз, а самые нижние отправляет в 0. Тогда заметим, что

**Факт.** Количество клеток на высоте не более $s$ равно $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^s$.

Это замечание позволяет однозначно восстановить разбиение числа и, следовательно, конфигурацию клеток.

## Задачи

**Задача 1.** Покажите, что матрица диагонализуема и найдите собственные векторы.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Найдите жорданову форму, а так же собственные вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Задача 3.** Пусть $V$ — конечномерное пространство и $A \in \operatorname{End}(V)$. Доказать, что оператор $A$ нильпотентен тогда и только тогда, когда он не имеет собственных чисел, отличных от 0.

**Задача 4.** Пусть $A$ — оператор, матрица которого в некотором базисе есть жорданова клетка $J_k(\lambda)$. Какая жорданова форма у оператора $A^2$?

**Задача 5.** Пусть $V_{\le n} = \{f \in K[x, y] \mid \deg f \le n\}$. Найдите жорданову форму оператора $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ (т.е. $f \to \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ ) на $V_{\le n}$.

**Задача 6.** а) Пусть $k$ — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим пространство $V = k[x]/p(x)$, где $p(x) = (x - \lambda)^k$. Найдите жорданову форму оператора $Af = x \cdot f$.
б) Пусть $k$ — некоторое поле. Рассмотрим пространство $V = k[x]/p(x)$, где $p(x) = q(x)^k$, $q(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$. Рассмотрим оператор $A\colon V \to V$ домножения на переменную $Af = x \cdot f$. Найдите базис, в котором матрица этого

оператора имеет следующий блочный вид

$$\begin{pmatrix} F_q & e & & \\ & F_q & e & \\ & & \ddots & e \\ & & & F_q \end{pmatrix}, \text{ где } F_q = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & -a_{m-2} \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}, \text{ а } e = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Задача 7.** Пусть $g \in GL_n(\mathbb{C})$ — матрица конечного порядка. Покажите, что эта матрица диагонализуема.

**Задача 8.** Пусть $A \in \mathrm{End}(V)$. Доказать, что следующие условия равносильны:
1) $A$ гомотетия, т.е. $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \in K$;
2) все ненулевые векторы пространства $V$ суть собственные векторы оператора $A$;
3) все подпространства инвариантны относительно $A$.