Курс: Функциональное программирование
Практика 3. Просто типизированное λ-исчисление.

Разминка

▶ Придумайте контекст Γ, в котором верны утверждения типизации

$$
\begin{array}{l}
\Gamma \vdash x : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \\
\Gamma \vdash x\,y : \alpha \to \beta \\
\Gamma \vdash \lambda x.\,y : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\,y : (\alpha \to \beta) \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\,x : (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \to \alpha \\
\Gamma \vdash \lambda x.\,x : (\alpha \to \beta) \to \alpha
\end{array}
$$

▶ Запишите приведённые выше утверждения типизации в стиле Чёрча.

Стандартные типы

▶ Какой тип можно приписать булевым значениям

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{tru} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,t \\
\texttt{fls} & \equiv & \lambda\,t\,f.\,f
\end{array}
$$

▶ Какой тип можно приписать парам

$$\texttt{pair} \equiv \lambda\,x\,y\,f.\,f\,x\,y$$

▶ Какой тип можно приписать числам Чёрча

$$
\begin{array}{lcl}
0 & = & \lambda\,s\,z.\,z \\
1 & = & \lambda\,s\,z.\,s\,z \\
2 & = & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,z) \\
3 & = & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,(s\,z)) \\
4 & = & \lambda\,s\,z.\,s\,(s\,(s\,(s\,z))) \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

▶ Какой тип можно приписать спискам

$$
\begin{array}{l}
[\,] = \texttt{nil} \ = \ \lambda c\,n.\,n \\
[2] \ = \ \texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil} \ = \ \lambda c\,n.\,c\ 2\ n \\
[3,2] \ = \ \texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil}) \ = \ \lambda c\,n.\,c\ 3\ (c\ 2\ n) \\
[5,3,2] \ = \ \texttt{cons}\ 5\ (\texttt{cons}\ 3\ (\texttt{cons}\ 2\ \texttt{nil})) \ = \ \lambda c\,n.\,c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))
\end{array}
$$

Деревья вывода типа

Дерево вывода типа для $\lambda f\, g\, x.\, g\,(f\,x)$
Контекст $\Gamma = x{:}\alpha, f{:}\alpha\to\beta, g{:}\beta\to\gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash g{:}\beta\to\gamma \qquad \dfrac{\Gamma\vdash f{:}\alpha\to\beta \quad \Gamma\vdash x{:}\alpha}{\Gamma\vdash f\,x{:}\beta}}{\Gamma\vdash g\,(f\,x){:}\gamma}}{f{:}\alpha\to\beta, g{:}\beta\to\gamma\vdash \lambda x^{\alpha}.\, g\,(f\,x) : \alpha\to\gamma}}{\dfrac{f{:}\alpha\to\beta\vdash \lambda g^{\beta\to\gamma}\, x^{\alpha}.\, g\,(f\,x) : (\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}{\vdash \lambda f^{\alpha\to\beta}\, g^{\beta\to\gamma}\, x^{\alpha}.\, g\,(f\,x) : (\alpha\to\beta)\to(\beta\to\gamma)\to\alpha\to\gamma}}$$

Определите тип следующих комбинаторов и постройте (для $\mathbf{S}$) дерево вывода типа
- $\mathbf{B} = \lambda f\, g\, x.\, f\,(g\,x)$
- $\mathbf{S} = \lambda f\, g\, x.\, f\,x\,(g\,x)$

Определите тип комбинаторов
- $\lambda x\, y.\, x\,(y\,x)$
- $\lambda x\, y.\, x\,y\,x$

Экспансия субъекта
Операция, обратная β-редукции называется экспансией (расширением).
Множество типизируемых в $\lambda\!\to$ термов не замкнуто относительно экспансии:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma\vdash N{:}\sigma \;\not\Rightarrow\; \Gamma\vdash M{:}\sigma$$

Действительно, рассмотрим терм $\mathbf{K\,I\,\Omega}$ ($\mathbf{I}\equiv\lambda x.\,x$, $\mathbf{K}\equiv\lambda x\,y.\,x$, $\mathbf{\Omega}\equiv\lambda x.\,x\,x$).
Хотя $\mathbf{K\,I\,\Omega}\twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$:

$$\mathbf{K\,I\,\Omega} \;\to_\beta\; (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega} \;\to_\beta\; \mathbf{I}$$

и $\vdash \mathbf{I}{:}\sigma\to\sigma$, но $\nvdash \mathbf{K\,I\,\Omega}{:}\sigma\to\sigma$, поскольку последнее содержит нетипизируемый подтерм.

Для $\lambda\!\to$ а ля Чёрч экспансия не сохраняет тип только из-за возможного наличия нетипизируемого подтерма.

Для $\lambda\!\to$ а ля Карри верно более сильное отрицание:

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \;\wedge\; \Gamma\vdash M{:}\sigma \;\wedge\; \Gamma\vdash N{:}\tau \;\not\Rightarrow\; \Gamma\vdash M{:}\tau$$

Покажем это на примере.
Возьмём $M\equiv\mathbf{S\,K}$ и $N\equiv\mathbf{K}_*$.

$$
\begin{array}{rl}
\mathbf{S} \equiv \lambda f\, g\, z.\, f\, z\, (g\, z) & \vdash \mathbf{S} : (\sigma \to \tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho \\
\mathbf{K} \equiv \lambda x\, y.\, x & \vdash \mathbf{K} : \sigma \to \tau \to \sigma \\
 & \vdash (\mathbf{S}\, \mathbf{K}) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \sigma \\
\mathbf{K}_* \equiv \lambda x\, y.\, y & \vdash \mathbf{K}_* : \tau \to \sigma \to \sigma
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{S}\, \mathbf{K} & \to_\beta & \lambda g\, z.\, \mathbf{K}\, z\, (g\, z) \;\to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g\, z.\, (\lambda y.\, z)\, (g\, z) \;\to_\beta\; \lambda g\, z.\, z \;\equiv_\alpha\; \mathbf{K}_*
\end{array}
$$

В красной редукции потерялась информация о типе g, как о функциональном, $(g\, z) : \tau \Rightarrow z : \sigma, g : \sigma \to \tau$.

Для $\lambda\!\to$ в стиле Чёрча информация не теряется:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{S}_{\sigma\tau\rho} & \equiv & \lambda f^{\sigma\to\tau\to\rho}\, g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, f\, z\, (g\, z) \\
\mathbf{K}_{\sigma\tau} & \equiv & \lambda x^{\sigma}\, y^{\tau}.\, x
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{S}_{\sigma\tau\sigma}\, \mathbf{K}_{\sigma\tau} & \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, \mathbf{K}_{\sigma\tau}\, z\, (g\, z) \;\to_\beta \\
 & \to_\beta & \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, (\lambda y^{\tau}.\, z)\, (g\, z) \;\to_\beta\; \lambda g^{\sigma\to\tau}\, z^{\sigma}.\, z \\
 & \equiv_\alpha & \lambda x^{\sigma\to\tau}\, y^{\sigma}.\, y \;\equiv\; \mathbf{K}_{*(\sigma\to\tau)\sigma}
\end{array}
$$

Можно переименовать связанные переменные, но не их типы!

Типизируйте по Чёрчу
- $\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{K}$
- $\mathbf{S}\,\mathbf{K}\,\mathbf{I}$

Найдите обитателей типа
- $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$
- $\alpha \to \beta \to \gamma \to \beta$
- $\alpha \to \beta \to \alpha \to \alpha$
- $\alpha \to \alpha \to \alpha \to \alpha$

Сколько разных (с точностью до β-эквивалентности) термов каждого типа вы можете привести?

Домашнее задание

Сконструируйте терм типа
- $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\delta \to \beta) \to \delta \to \gamma$
- $(\delta \to \delta \to \alpha) \to (\gamma \to \alpha) \to (\alpha \to \beta) \to \delta \to \gamma \to \beta$ (2 штуки)

► $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$
► $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$

Добавьте типы в λ-абстракцию и постройте дерево вывода типа для терма
$\lambda x\, y.\, y\, (\lambda z.\, y\, x) : (\gamma \to \epsilon) \to ((\gamma \to \epsilon) \to \epsilon) \to \epsilon$