19 октября 2017

1. Пусть G есть граф, построенный на $n \geq 2$ вершинах, $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ есть максимальная и минимальная степени вершин в графе G. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

   a) удаление вершины степени $\Delta(G)$ не может увеличить среднюю степень вершин в графе;

   b) удаление вершины степени $\delta(G)$ не может уменьшить среднюю степень вершин в графе.

2. Пусть G есть простой граф, все вершины которого имеют степени, большие или равные двум. Доказать, что в таком графе обязательно присутствуют :

   a) подграф, являющийся циклом C;

   b) индуцированный подграф, являющийся циклом C.

3. Пусть G есть простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ, $\delta \geq 2$. Доказать, что в графе G существует цикл длины, большей или равной $\delta + 1$.

4. Доказать, что любой простой связный граф $G \neq K_n$, построенный на $n \geq 3$ вершинах, содержит в качестве своего подграфа индуцированный путь P_3 длины 2.

5. В графе, показанном на рис. 1, найти двудольный подграф с максимальным количеством ребер. Доказать, что полученный подграф является максимальным.

6. Доказать, что любой граф G без петель содержит остовный двудольный подграф F, степень любой вершины x в котором больше или равна $\deg(x)/2$, где $\deg(x)$ — степень той же вершины в исходном графе.

7. Доказать, что любой 3-регулярный граф G имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда в нем содержится мост.

8. Доказать, что любое дерево является двудольным графом.

9. В предыдущем упражнении мы доказали, что дерево является двудольным графом. Доказать, что хотя бы один лист произвольного дерева содержится в той части разбиения вершин на доли, которое содержит наибольшее количество вершин.

10. Пусть F есть лес, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Подсчитать количество m ребер в графе F. Доказать, что любой простой граф, имеющий k компонент связности и найденное в первой части упражнения количество m ребер, обязательно является лесом.

11. Доказать, что вершина x дерева T является точкой сочленения тогда и только тогда, когда ее степень строго больше единицы.

12. Построить все неизоморфные друг другу деревья на $n = 6$ вершинах.

13. Пусть граф G имеет остовные деревья диаметрами 2 и l. Доказать, что в таком графе для любого $k \in (2, l)$ существует остовное дерево диаметром k.

14. Пусть T есть дерево, в котором степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Доказать, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.