Домашнее задание 3. Числа Каталана.

Задач на зачёт: 4,5

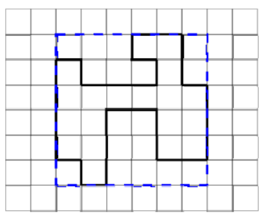
1. Доказать, что количество *полных* плоских корневых бинарных деревьев (т.е. деревьев, у которых любая вершина имеет либо ровно двух потомков, либо ни одного) с $(n+1)$-м листом равно числу Каталана C_n.

2. Докажите, что количество расстановок скобок в выражениях вида $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n \cdot a_{n+1}$ описывается числами Каталана C_n.

3. Докажите, что число триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника равно числу Каталана C_n.

4. Постройте биекцию между всеми триангуляциями выпуклого $(n+2)$-угольника и плоскими корневыми бинарными деревьями, построенными на n вершинах. Изобразите эту биекцию на рисунке для одной из конкретных триангуляций выпуклого шестиугольника.

5. Полимино называется область на клетчатой плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной, идущей по сторонам клеток (см.рис. 1a). Мы будем рассматривать так называемые выпуклые полимино, то есть полимино, периметр которого совпадает с периметром его минимального ограничивающего прямоугольника, то есть прямоугольника минимального периметра, содержащего полимино внутри себя (см. синюю пунктирную линию на рис. 1a). Так, полимино, показанный на рис.1a, выпуклым не является. На рис.1b показан выпуклый полимино.


(a)

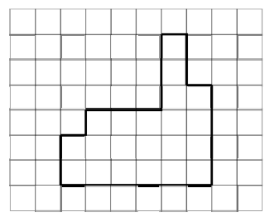

(b)

Рис. 1: Полимино

Полимино называется ориентированным выпуклым полимино, если он содержит по меньшей мере один из углов своего минимального ограничивающего прямоугольника. Если он содержит оба нижних угла своего минимального ограничивающего прямоугольтика, то полимино называется стековым (см.рис.1b). Доказать, что количество стековых полимино с периметром $2n+2$ равно числу Фибоначчи F_{2n-2}. Нарисовать все пять стековых полимино с периодом восемь ($n = 3$). (В данной задаче считать $F_0 = F_1 = 1$.)

6. Используя прямые комбинаторные соображения, доказать, что

$$M_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} C_k \binom{n}{2k},$$

где C_k — числа Каталана.

7. Числа Деланноя $D(m,n)$ описывают количество путей на плоскости из точки $(0,0)$ в точку (m,n), состоящих из шагов вида $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Доказать, что эти числа в случае $n \geq m$ рассчитываются по формуле

$$D(m,n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+m-k}{m}.$$