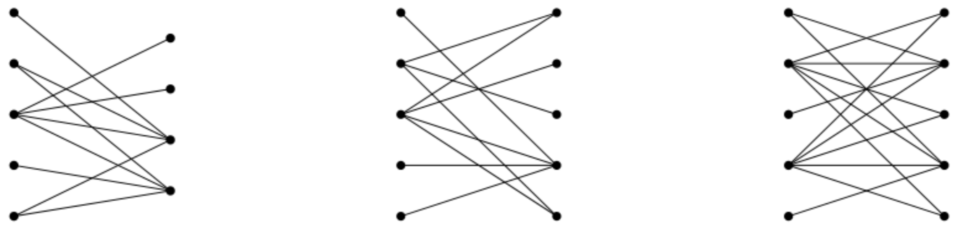
30.11.2017

1. Найти максимальные паросочетания в приведенных на рисунке графах. Доказать, что данные паросочетания максимальны.



(a) (b) (c)

2. Найти количество X-насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$ с долями X и Y, $|X| = n$, $|Y| = m$, $n \leqslant m$.

3. Доказать, что в непустом k-регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

4. Доказать, что если $|N(S)| > |S|$ для любого $\emptyset \neq S \subset X$ в двудольном графе $G[X, Y]$, то любое ребро принадлежит хотя бы одному X-насыщенному паросочетанию M.

5. Доказать теорему Холла, используя вершинную теорему Менгера.

6. Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.

7. В группе имеются шесть студентов. Известно, что первый и третий студенты вместе работают над научным проектом, второй и четвертый вместе посещают спецкурс, первый, второй и пятый вместе занимаются спортом, третий и пятый вместе ходят на занятия по английскому языку, и, наконец, пятый и шестой студенты вместе играют в компьютерные игры. Оказалось, что в один из дней все эти дела нужно провести одновременно. Можно ли так распределить студентов по занятиям, чтобы каждое из этих дел не сорвалось?

8. Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ. Доказать, что любая квадратная матрица $n \times n$, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k.

9. Дважды стохастической матрицей Q называется вещественная неотрицательная матрица, в которой сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любом столбце равняется единице. Доказать, что любая такая матрица Q представима в виде линейной комбинации

$$Q = c_1 \cdot P_1 + \ldots + c_m \cdot P_m,$$

где P_i — матрицы перестановок, c_i — вещественные неотрицательные числа, сумма которых равна единице.