11 Домашнее задание

11.1 (1,5 балла). С помощью теоремы Weisner доказать, что функция Мебиуса решетки B_n рассчитывается по формуле

$$\mu(S,T) = \begin{cases} (-1)^{|S|-|T|}, & \text{если } S \subseteq T, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

11.2 (2 балла). Рассмотрим функции $f\colon B_n \to \mathbb{C}$, заданные на всевозможных подмножествах множества $[n]$. Пусть пара таких функций связана соотношением

$$g(T) = \sum_{S\subseteq T} f(S).$$

Мы показали, что в этом случае значения функции f можно выразить через значения функции g по формуле

$$f(T) = \sum_{S\subseteq T} (-1)^{|T-S|} \cdot g(S).$$

Вывести из этой формулы формулу включения-исключения.

11.3 (1,5 балла). Без помощи и с помощью теоремы Weisner доказать, что функция Мебиуса решетки всех положительных делителей числа n рассчитывается по формуле

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ (-1)^s, & \text{если } y/x \text{ есть произведение } s \text{ различных простых чисел;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

11.4 (1 балл). Прямым произведением пары P и Q частично упорядоченных множеств называется частично упорядоченное множество $P \times Q$, элементами которого являются упорядоченные пары вида (p,q), $p \in P$, $q \in Q$, для которых $(p,q) \preccurlyeq (p',q')$ тогда и только тогда, когда $p \preccurlyeq p'$ и $q \preccurlyeq q'$. Доказать, что

$$\mu_{P\times Q}((p,q),(p',q')) = \mu_P(p,p') \cdot \mu_Q(q,q').$$

11.5 (1 балл). Пусть α и β есть пара разбиений множества $[n]$, таких, что $\alpha \preccurlyeq \beta$. Вычислить значения функции Мебиуса $\mu(\alpha,\beta)$ для таких двух элементов в решетке Π_n.

11.6 (1 балл). Доказать, что любая конечная решетка имеет максимальный $\widehat{1}$ и минимальный $\widehat{0}$ элемент. Привести пример решетки, в которой минимальный элемент отсутствует.

11.7 (1 балл). Доказать, что в любой решетке $(x \wedge y) \vee y = y$ и $(x \vee y) \wedge y = y$ (законы поглощения).

11.8 (1,5 балла). Нарисовать диаграммы Хассе всех решеток, содержащих не более пяти элементов.

11.9 (1 балл). Решетки L, для которых справедливо равенство

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z \qquad \text{для всех } y \in L \text{ и } x \preccurlyeq z,$$

называются модулярными решетками. Какие из описанных в упражнении 11.5 решеток не являются модулярными?

11.10 (1 балл). Решетки L, для которых справедливо равенство

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{для всех } x, y, z \in L,$$

называются дистрибутивными решетками. Какие из описанных в упражнении 11.5 решеток не являются дистрибутивными?