1-10

11. Давайте еще раз повнимательнее посмотрим на композиционную ф-цию 12

$$H(x) = G(F(x)).$$

1) Рассм. следующий частный случай: $\exists$ в комнате находится четное число $n=2k$ человек. Предположим, что мы хотим разбить этих людей на k неупорядоченных пар, затем совершить над этими парами какое-то комбинат. действие a_2 способами и, наконец, совершить какое-то другое комбинаторное действие над этими k парами b_k способами. Вопрос: сколькими способами я могу осуществить все эти действия?

а) Очевидно, что в этом случае $a_0=a_1=a_3=a_4=\dots=a_n=0$,

$a_2\neq 0$, $F(x)=a_2\cdot\frac{x^2}{2!}$; $G(x)=b_0+b_1x+b_2\frac{x^2}{2!}+\dots+b_k\frac{x^k}{k!}+\dots$,

и поэтому $H(x)=c_0+c_1\frac{x}{1!}+c_2\frac{x^2}{2!}+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}+\dots=$

$$=b_0+b_1\cdot a_2\frac{x^2}{2!}+b_2\cdot\left(a_2\frac{x^2}{2!}\right)^2\frac{1}{2!}+\dots+b_k\left(a_2\cdot\frac{x^2}{2!}\right)^k\cdot\frac{1}{k!}+\dots$$

$$=\frac{b_k}{k!}\cdot\frac{a_2^k}{(2!)^k}\cdot n!\cdot\frac{x^{2k}}{n!}$$

б) Тогда:

$$c_n=\begin{cases}0, \text{ если } n=2k+1,\ k=0,1,2,\dots\\ \frac{b_k}{k!}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^k\cdot n!, \text{ если } n=2k,\ k=0,1,2\dots\end{cases}$$

---

2) Теперь предположим, что кол-во (n) людей в аудитории кратно пяти $(n=5k)$, и мы совершаем аналогичные действия, т.е. разбиваем n-множество на пятерки, совершаем внутри $\forall$ пятерки комбинат. действие a_5 числом способов, а затем - совершаем над k пятерками другое комбинаторное действие b_k способами $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)=a_5\frac{x^5}{5!}$; $G(x)=b_0+b_1\frac{x^1}{1!}+b_2\frac{x^2}{2!}+\dots+b_k\frac{x^k}{k!}+\dots$;

$H(x)=G(F(x))=c_0+c_1\frac{x^1}{1!}+c_2\frac{x^2}{2!}+\dots+c_n\frac{x^n}{n!}+\dots=b_0+b_1\cdot\frac{\left(a_5\frac{x^5}{5!}\right)^1}{1!}+$

$+b_2\frac{x^2}{\dots}\left(a_5\frac{x^5}{\dots}\right)^2+\dots+b_k\frac{x^k}{\dots}\left(a_5\frac{x^5}{\dots}\right)^k$

Тогда кол-во c_n способов совершить все эти действия равно

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \neq 5k, \\ n! \cdot \frac{b_k}{k!} \cdot \left(\frac{a_5}{5!}\right)^k, & \text{если } n = 5k. \end{cases} \quad , k = 0, 1, 2 \ldots$$

3) Наконец, предположим, что нам разрешено разбивать n-элементное мн-во на пятерки и/или двойки $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x) = 0 + 0 + a_2 \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + a_5 \frac{x^5}{5!} + 0 \frac{x^6}{6!} + \ldots + 0 \frac{x^n}{n!}$$

$$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + b_k \frac{x^k}{k!} + \ldots,$$

$$H(x) = G(F(x)) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Нас интересует коэф-т c_n при $\frac{x^n}{n!}$. Как его найти?

а) Формально: $H(x) = b_0 + b_1 \cdot \left(a_2 \frac{x^2}{2!} + a_5 \cdot \frac{x^5}{5!}\right) + \ldots + \frac{b_k}{k!} \cdot \left(a_2 \frac{x^2}{2!} + a_5 \frac{x^5}{5!}\right)^k + \ldots$

б) Напомним, что

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \underbrace{\binom{k}{i}}_{\text{из } k \text{ по } i \text{ способами выбираю } i \text{ множителей } a} a^i \cdot \overbrace{\binom{k-i}{k-i}}^{\text{оставшимися } k-i \text{ способами выбираю множители}} b^{k-i} = \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_m \geq 0}} \frac{k!}{i_1! \cdot i_2!} a^{i_1} b^{i_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_k}{k!} \cdot \left(a_2 \frac{x^2}{2!} + a_5 \frac{x^5}{5!}\right)^k = \frac{b_k}{\cancel{k!}} \cdot \sum_{\substack{k_2+k_5=k \\ k_2, k_5 \geq 0}} \frac{\cancel{k!}}{k_2! \cdot k_5!} \cdot a_2^{k_2} \cdot a_5^{k_5} \cdot \frac{1}{(2!)^{k_2}} \cdot \frac{1}{(5!)^{k_5}} \cdot x^{2k_2+5k_5} \cdot \frac{n!}{n!}$$

в) Нас же интересуют все такие k_2 и k_5, которые обеспечивают нам равво $2k_2 + 5k_5 = n \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_n = \sum_{\substack{k_2+k_5=k \\ 2k_2+5k_5=n \\ k_2, k_5 \geq 0}} \frac{n!}{k_2! \cdot k_5!} \, b_{k_2+k_5} \cdot \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{a_5}{5!}\right)^{k_5}.$$

лишнее!

г) Как видим, Σ-ие проиходит по всем возможным решениям ур-ия $\begin{matrix} 2k_2 + 5k_5 = n \\ k_2, k_5 \geq 0 \end{matrix}$. Например, при $n = 10$: имеем 2 реш-ия: $k_2 = 5, k_5 = 0$ и $k_2 = 0, k_5 = 2$

Кол-во таких решений задается, как мы знаем, произв-щей ф-цией $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)}$. Для получения всех решений обычно используют т.н. энумератор $f(x_2, x_5) = \frac{1}{(1-x_2^2)(1-x_5^5)} = (1 + x_2^2 + x_2^4 + \ldots)(1 + x_5^5 + x_5^{10} + \ldots)$

4) Ну и теперь, наверное, понятно, как это все обобщается на общий случай функц.

$$F(x) = 0 + a_1 \frac{x^1}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{x^n}{n!} + \ldots :$$

$$\boxed{C_n = \sum_{\substack{1\cdot k_1 + \ldots + n\cdot k_n = n \\ k_i \geq 0}} \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} B_{k_1+\ldots+k_n} \cdot \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}} \quad (*)$$

Суммирование ведется по всем неотрицат. целым решениям ур-ия

$$1\cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n, \quad k_i \geq 0$$

Таких решений, как мы с вами уже знаем, $\exists\ p(n)$ штук. Однако здесь нам нужно не сколько решений, а все эти $p(n)$ решений $\Rightarrow$ более сложная задача.

5) Полученная ф-ла $(*)$ для C_n впервые была записана французским математиком Арбогастом в 1800 г. и переоткрыта в 1855 г. итальянским математиком, изобретателем и, впоследствии, священником Франческо Фаа ди Бруно (Faà di Bruno). С тех пор она носит название ф-лы Фаа ди Бруно.

6) На самом деле и Арбогаст, и Фаа ди Бруно получили эту ф-лу, исследуя n-ю производную композиции 2-х функц. Давайте вспомним мат. анализ и сосчитаем ~~сразу~~ несколько первых производных:

$$\text{Пусть } H(x) = G(F(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{а)}\ H'(x) = G'_F \cdot F'_x$$

$$\text{б)}\ H''(x) = G''_{FF} \cdot (F'_x)^2 + G'_F \cdot F''_{xx}$$

$$\text{в)}\ H'''(x) = G'''_{FFF} \cdot (F'_x)^3 + \underbrace{G''_{FF} \cdot 2 \cdot F'_x \cdot F''_{xx} + G''_{FF} \cdot F'_x \cdot F''_{xx}}_{3 \cdot G''_{FF} \cdot F'_x \cdot F''_{xx}} + G'_F \cdot F'''_{xxx}$$

Вопрос: $\exists$-ли общая ф-ла для этих производных и причем тут композиционная ф-ла?

На самом деле, имеет, и совершенно прямое отношение. 15

Именно, $\forall$ функц в окрестн т. $x=x_0$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)\frac{x^1}{1!}+F''(x_0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+F^{(n)}(x_0)\frac{x^n}{n!}+\ldots=:$$
$$=:a_0+a_1\frac{x^1}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$
$$G(x)=G(x_0)+G'(x_0)\frac{x^1}{1!}+\ldots+G^{(n)}\frac{x^n}{n!}=:b_0+b_1\frac{x^1}{1!}+\ldots+b_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$
$$\Rightarrow \exists\ H(x)=G(F(x))=c_0+c_1x+c_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+c_n\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$
$$\text{где } c_n=H^{(n)}(x)\Big|_{x=x_0}=H^{(n)}(x_0)=(*).$$

12. Полиномы Белла.

1) Обратимся еще раз к ф-ле (*). Заметим, что ~~коэфф~~ в этой ф-ле индексы у коэфов b_k получаются самыми различными — (~~это~~ получаются при решении системы $1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n$, и) в зависимости от того, ~~какие индексы сколько~~ сколько именно индексов $k_i\neq 0$)
Нам же иногда значительно более удобно наряду с n фиксировать и k — кол-во блоков в разбиении n-мн-ва. Для этого мы должны иметь все решения системы

$$k_1+\ldots+k_n=k$$
$$1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n$$

при фиксированных значениях n и k. Количество таких решений нам известно - оно равно числу $p_k(n)$ разбиений n ровно на k слагаемых! Нам нужно понять структуру самих этих решений.

2) Понятно, что если $k>n$, то решений $\nexists$ ($p_k(n)=0\ \forall k>n$). Далее, а) положим $k=1$ $\Rightarrow$ знаем, что $p_1(n)=1$; и это разбиение на 1 блок вида $n=n$. Проверим, так ли это: имеем:

$$\left.\begin{array}{l}k_1+\ldots+k_n=1\\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n\end{array}\right\}\Rightarrow k_n=1,\quad k_i=0,\quad 1\le i< n$$

б) Пусть теперь $k=2$; мы знаем, что $p_2(n)=\lfloor n/2\rfloor$. Что это за решения? Система ур-й в этом случае выглядит так:

$$\begin{cases} k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n=2 \\ 1\cdot k_1+2k_2+\ldots+n\cdot k_n=n \end{cases}$$

Пусть $k_n \neq 0$, например, $k_n=1$ – минимальному отличному от нуля числу. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} k_1+\ldots+k_{n-1}=1 \\ 1k_1+2k_2+\ldots+(n-1)k_{n-1}=0, \end{cases}$$

и решений у такой системы $\nexists \Rightarrow k_n=0$.

в) Пусть теперь $k=3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} k_1+k_2+\ldots+k_n=3 \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n. \end{cases}$$

По тем же соображениям что и ранее, $k_n=0$. Пусть теперь $k_{n-1}\neq 0 \Rightarrow$ $\exists\, k_{n-1}=1 \Rightarrow$ имеем

$$\begin{cases} k_1+\ldots+k_{n-2}=2 \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-2)k_{n-2}=n-(n-1)=1. \end{cases}$$

Очевидно, что и эта система решений не имеет: из 2-го ур-я следует, что $k_1=1$, $k_2=\ldots=k_{n-2}=0 \Rightarrow$ их $\sum \neq 2$.

г) Теперь общий случай:

$$\begin{cases} k_1+\ldots+k_n=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n. \end{cases}$$

Тогда: последовательно получаем, что $k_n, k_{n-1}, \ldots, k_{n-k+2}=0$. Действительно, проверим последний шаг: $\exists\, k_n=\ldots=k_{n-k+3}=0$, $k_{n-k+2}=1 \Rightarrow$ имеем

$$\begin{cases} k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k-1 \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n-(n-k+2)=k-2 \end{cases}$$

Имеем $\sum k_i=k-1$, и ту же сумму, но с положит. коэфта-ми, >1, $=k-2$. Очевидно, это невозможно $\Rightarrow k_{n-k+2}=0$.

---

3) Проведенные рассуждения позволяют уточнить ф-лу Фаа ди Бруно:

$$(**)\quad \boxed{\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k\cdot B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1}), \text{ где} \\ B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1}) &= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k \\ 1k_1+\ldots+(n-k+1)k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_{n-k+1}!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{a_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{k_{n-k+1}} \end{aligned}}$$

Видно, что $B_{n,k}(a_1,\dots,a_{n-k+1}) = C(n,k)$ — это и есть те самые коэф-ты $C(n,k)$, которые мы получили у композиционной ф-ии, полагая в них $b_k = t^k$. Мы, тем самым получили для них явные аналитич. вырия. Еще раз их комбинаторный смысл: мы разбиваем ~~а~~ n-мн-во ровно на k блоков, (т.е. неразличимых непустых попарно непересекающихся подмн-в, $\cup$-ие кот. дает нам все n-мн-во), причем в этом разбиении ровно k_1 блок содержит 1 эл-т, k_2 блока – 2 эл-та, ..., k_{n-k+1} $(n-k+1)$-элементов), таких разбиений $\exists$

$$\sum \frac{n!}{k_1!\,(1!)^{k_1}\,k_2!\,(2!)^{k_2}\cdots k_{n-k+1}!\,((n-k+1)!)^{k_{n-k+1}}}$$ штук;

затем мы во всех k_1 одноэл-тных блоках совершаем комбинат. действие a_1 способами ($\Rightarrow$ всего имеем $a_1^{k_1}$ способов), во всех k_2 двухэлементных – – // – a_2 ($\Rightarrow a_2^{k_2}$ – // –), ...

4) Откуда в знаменателе факториалы $(i!)^{k_i}$ и что они означают? Рассмотрим, к примеру, разбиение 4-мн-ва различимых эл-тов на 2 блока. Имеем

$$4 = 3+1 \quad и \quad 4 = 2+2.$$

В первом случае имеем 4 вар-та разбиения:

$$\{a,b,c\}\cup\{d\};\ \dots\ \{b,c,d\}\cup\{a\}$$

Но: этот коэф-т – это коэф-т учитывающий порядок единиц.

Коэф-т $= \dfrac{4!}{(3!)^{k_3}(1!)^{k_1}} = 4$, $k_1=k_3=1$, как и должно быть. То, что блоки неупорядочены, учтено тем, что мы рассматриваем неупорядоченное разбиение на 2 блока т.е. когда $1+3=3+1$ – 1 вариант.

Во 2-м случае мы имеем 3 вар-та:

$$\{a,b\}\cup\{c,d\};\ \{a,c\}\cup\{b,d\};\ \{a,d\}\cup\{c,b\}$$

Коэф-т: $\dfrac{4!}{(2!)^{k_2}} \overset{2}{=} \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = \dfrac{4\cdot3\cdot2}{4} = 3\cdot2 = 6$ – это коэф-т, учитывающий порядок единиц, и то, что $2+2=2+2$, в решении ур-ия $x_1+x_2=4$ с учетом порядка не учтено – в этом ур-ии это) – 1 вариант

Еще раз: когда решали ур-е $x_1+x_2=4$

а) с учетом порядка: имеем 3 реш-ия: $3+1=2+2=1+3$

б) без учета порядка: имели 2 решения: $3+1=2+2$.

Когда у нас в ящиках различное кол-во предметов, как в случае $3+1$, мы упорядоченность ящиков снимаем, переходя от упорядоченных разбиений числа n к неупорядоченным.

Когда же у нас в ящиках одинаковое кол-во предметов мы таким способом упорядоченность ящиков снять не можем ⇒ нужно еще дополнительно делить на $2!$, где 2 - это кол-во (k_2) ящиков k_2, содержащих ровно 2 элемента.

---

5) Исходя раз: коэф-т в $B_{n,k}$ есть, таким образом, кол-во разбиений n-мн-ва различимых эл-тов на k неразличимых блоков, в которых: $\exists$ k_1 блоков, содержащих 1 элемент, k_2 блоков, — — 2 эл-та, k_{n-k+1} блоков, содержащих $(n-k+1)$ элементов.

Т.о. это - очень подробное (аккуратное и детальное) и тщательное описание k-разбиения n-мн-ва.

---

6) Пример:
$$C_4(t) = \sum_{k=1}^{4} b_k \cdot C(n,k) = \sum_{k=1}^{4} b_k \cdot B_{n,k}(a_1,\dots,a_{4-k+1}) =$$
$$= b_4 \cdot a_1^4 + 6 \cdot b_3 \cdot a_1^2 \cdot a_2 + b_2 \cdot [3a_2^2 + 4a_1a_3] + b_1 \cdot a_4 =$$
$$= b_1 \cdot \underbrace{B_{4,1}(a_1,a_2,a_3,a_4)}_{a_4} + b_2 \cdot \underbrace{B_{4,2}(a_1,a_2,a_3)}_{3a_2^2+4a_1a_3} + b_3 \cdot \underbrace{B_{4,3}(a_1,a_2)}_{6a_1^2a_2} + b_4 \cdot \underbrace{B_{4,4}(a_1)}_{a_1^4}$$

---

7) ~~Вопрос~~ Видно из примера, что $B_{n,k}$ представляют собой некоторые (однородные!) полиномы от $a_1,\dots,a_{n-k+1}$. Как доказать, что это - действит. полиномы? И $\exists$-ли рекурр. соотношения, позволяющие их вычислять?

Конечно же, рекурр. соотнош. $\exists$. Для того, чтобы его получить, мы заметим, что, как видно из (**), функции $B_{n,k}$ не зависят ни от одного из коэффициентов b_k

производящей функции $G(x)$ ⇒ их можно выбирать из соображений удобства. Так, вот, оказывается, и здесь удобен выбор $b_k = t^k$. $\Longleftrightarrow$ $G(x,t)=e^{tx}$. Тогда:

$$H(x,t)=e^{t\cdot F(x)} \Rightarrow c_0(t)+c_1(t)x+c_2(t)\frac{x^2}{2!}+\dots+c_n(t)\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Тогда: $$\frac{\partial H}{\partial x} = c_1(t)+c_2(t)x+\dots+c_{n+1}(t)\frac{x^n}{n!}+\dots = t\cdot e^{t\cdot F(x)}\cdot F'(x) =$$

$$= t\cdot F'(x)\cdot H(x,t) = t\cdot\left[a_1+a_2x+\dots+a_{n+1}\frac{x^n}{n!}+\dots\right]\cdot\left[\underbrace{c_0(t)}_{=1}+c_1(t)x+\dots+c_n(t)\frac{x^n}{n!}+\dots\right]$$

Приравняем теперь коэф-ты при одинак. степенях $x^n/n!$:

x^0: $c_1(t)=t\cdot a_1$

x^1: $c_2(t)=t\cdot[a_1\cdot c_1(t)+a_2]=t\cdot[t\cdot a_1^2+a_2]=t^2a_1^2+ta_2$

$\frac{x^2}{2!}$: $c_3(t)=t\cdot[a_1c_2(t)+2!\cdot a_2\cdot c_1(t)+a_3\cdot 1]=$

$=t[t^2a_1^3+ta_1a_2+2t\cdot a_1a_2+a_3]=t^3a_1^3+3t^2a_1a_2+t\cdot a_3$

. . . . . .

$\frac{x^n}{n!}$: $\boxed{c_{n+1}(t)=t\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n+1-k}\cdot c_k(t)}$ $(***)$.

Собирая в правой части коэф-ты при t^k, мы и получим коэф-ты $B_{n,k}(a_1,\dots,a_{n-k+1})$. Зная их, мы, в свою очередь, сосчитаем c_n для $\forall$ производящей ф-ции $G(x)$ по ф-ле $(**)$.

8) Из $(***)$ видно также, что $B_{n,k}$ – действительно полиномы. Они наз. <u>полиномами Белла</u> и имеют огромное число приложений в различных разделах математики.

9) Ещё раз отметим важный частный случай $a_1=\dots=a_n=\dots=1$, $a_0=0$. Это случай разбиения n-множества на блоки. В случае $b_k=t^k$ имеем

$$H(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\,t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$ где

$S(n,k)$ – кол-во разбиений n-множества ровно на k блоков. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\boxed{S(n,k) = B_{n,k}(1,\dots,1) = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{n-k+1}=k \\ 1\cdot k_1+\dots+(n-k+1)!k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!(1!)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(k_{n-k+1})!((n-k+1)!)^{k_{n-k+1}}}}$$

– явное выражение для чисел Ст. 2-го рода. Сравним его с выражением

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!}\hat{S}(n,k) = \frac{1}{k!}\cdot\sum_{k_1+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}},$$

где суммирование идет по всем <u>упорядоченным</u> разбиениям числа n: $k_1+\dots+k_n=n$.