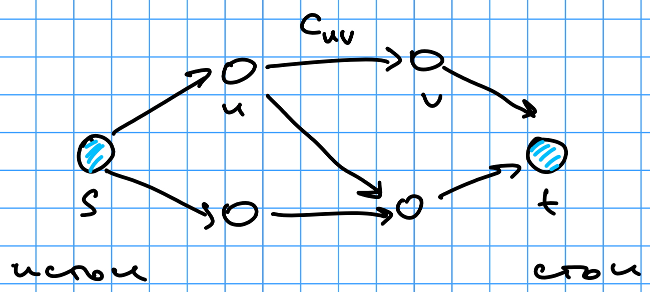
Задача о максимальном потоке



$\forall\ (u,v) \in E$

c_{uv} – пропускн. способность

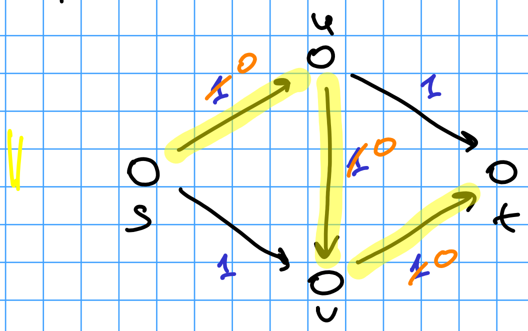
Поток

$f : E \to \mathbb{R}_+$

1. $0 \leq f(u,v) \leq c_{u,v}$
2. $\forall v \in V \setminus \{s,t\} \quad \sum\limits_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum\limits_{(v,u)\in E} f(v,u)$

Величина потока в сети $|f| = \sum\limits_{(s,v)\in E} f(s,v) = \sum\limits_{(v,t)\in E} f(v,t)$

Решение в лоб

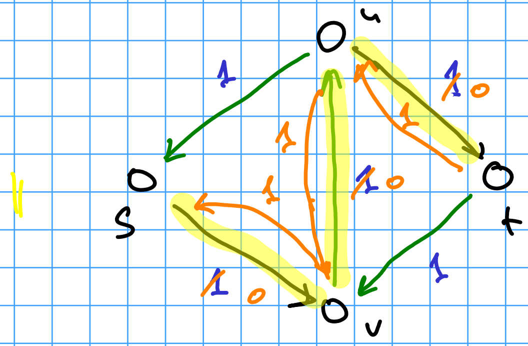


Макс. поток = 2

Остаточная сеть (residual network)

$\tilde{G}_f = (V, \tilde{E})$

$$\tilde{E} = \begin{cases} (u,v) \in E, & f(u,v) < c_{uv}, \quad \tilde{c}_{uv} = c_{uv} - f(u,v) \\ (v,u), \ (u,v) \in E, & f(u,v) > 0, \quad \tilde{c}_{vu} = f(u,v) \end{cases}$$



← $\tilde{G}_f$ Дополняющий путь

$\hat{f} : V^2 \to \mathbb{R}$ – перенос из u, v

1. $\hat{f}(u,v) = f(u,v) - f(v,u)$ // $f(u,v)=0 \quad (u,v) \notin E$
2. $\hat{f}(u,v) = -\hat{f}(v,u)$

Алгоритм Форда-Фалкерсона

$\forall (u,v) \in E \quad f(u,v) = 0$

Пока есть путь из s в t в $\tilde{G}_f$

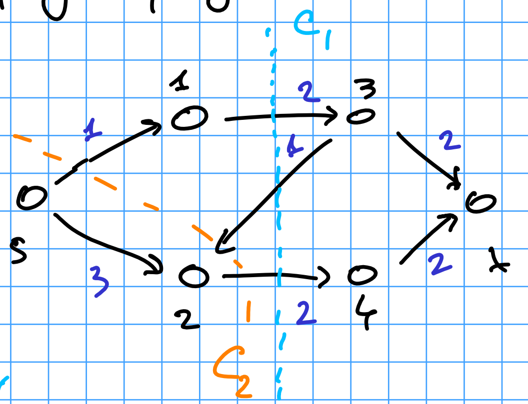
Найти дополняющий путь $s \to t$

Пустить по нему макс. возм. поток

обновляем остаточную сеть

Свойство макс. потока

|| Максимальный поток в сети равен размеру минимального разреза. ||



$|C_1| = 4$

$|C_2| = 3$

Разрез $C = (S, T)$:

$S \sqcup T = V$

$\{s, 1, 2\} = S$

$\{3, 4, t\} = T$

Значение разреза: $\sum\limits_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c_{uv}$

▷ || $|f| \le |C|$ – очевидно

$$\min_C |C| = \max_f |f|$$

$\measuredangle$ макс поток $\Rightarrow$ нет пути из s в t в $\tilde{G}_f$

$\Rightarrow$ Рассм. $S = \{v \mid v$ достижимо из $s\}$

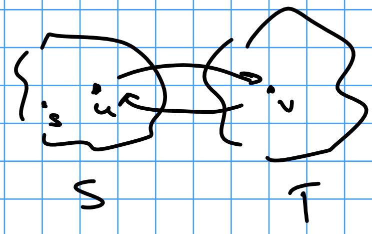
$T = V \setminus S$

Рассм. $(u,v) \in E$ $\quad u \in S,\ v \in T$

$c_{uv} = f(u,v)$

Рассм. $(v,u) \in E$

$f(v,u) = 0$ $\quad\triangleleft$

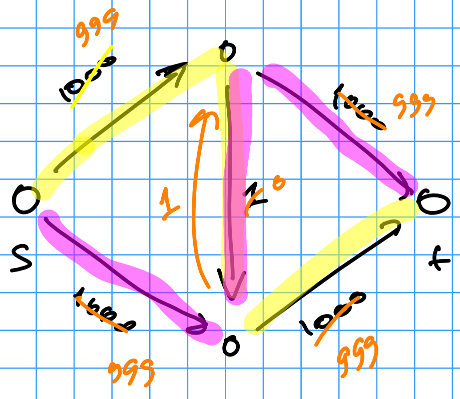


Следствие: мо свой след макс. потока.

Анализ:

Если $c_{uv} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ остановимся, т.к. поток $\uparrow\uparrow$ на $\#$ итерации

$O(|f|)$ итераций $\Rightarrow$ $O(|f| \cdot E)$ операций



~ 1000 итераций

Возможен вариант $\sim$ $|f| \cdot E$ операций

Алгоритм Эдмондса - Карпа

Алгоритм Форда - Фалкерсона, где дополняющие пути - кратчайшие (т.е. ищутся поиском в ширину).

$O(VE^2)$

D $D(v)$ - расстояние от s до v в ост. сети.

Лемма

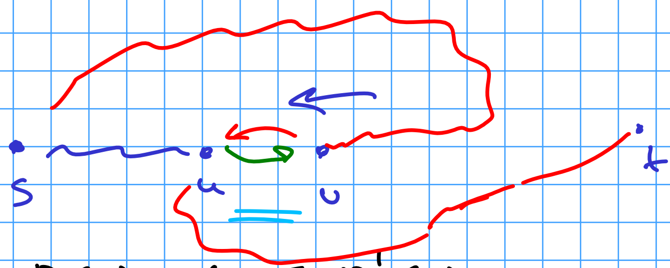
D(v) не убывает в алг. Э.-К.

От пр.: пусть $D(v) > D'(v)$, где D' — расст. после одной итерации и пусть v — ближайшая такая вершина к s.

$s \rightsquigarrow u \to v$ — кратчайший путь от s до v

$$D'(v) = D'(u) + 1$$

$$\to * \ D(v) \geq D'(v) + 1$$



Ребро $(u,v) \notin \tilde{E}_f$

т.к. иначе $\underline{D(v) \leq D(u) + 1} \leq D'(u) + 1$

$\Rightarrow (v,u) \in \tilde{E}_f$

$$D(u) = D(v) + 1$$

$$D'(u) \geq D(u)$$

$$\to \quad D'(v) \geq D(u) + 1 = D(v) + 2$$

$$* \ D(v) \leq D'(v) - 2$$

$\searrow$ противоречие. $\lhd$

$\rhd$ критические рёбра — это те, кот. насыщ. на какой-то итерации.

(u,v) — критическое на итерации t_1 и след. раз на итерации t_2

$\Rightarrow \exists$ итерация t_3 : $t_1 < t_3 < t_2$ на кот. критическим было (v,u)

$$D_{t_1}(u) + 1 = D_{t_1}(v)$$

$$D_{t_2}(u) + 1 = D_{t_2}(v)$$

$$D_{t_3}(v) + 1 = D_{t_3}(u)$$

$$D_{t_2}(v) = D_{t_2}(u) + 1 \geq D_{t_3}(u) + 1 = D_{t_3}(v) + 2 \geq$$

$$\geq D_{t_1}(v) \underline{+ 2}$$

$\Rightarrow$ ∀ ребро $\leq \frac{V}{2}$ критическим.

Всего не более $O(E \cdot V)$ поисков пути

$$\Rightarrow O(V \cdot E \cdot E) = O(V \cdot E^2)$$