Неприводимость многочленов и разложение на множители

Задачи

Задача 1. Докажите неприводимость многочленов над $\mathbb{Z}$: $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 5x + 2$, $x^5 - 4x^2 + 2x + 5$.

Задача 2. Докажите неприводимость над конечным полем, используя алгоритм Берлекэмпа:
а) $x^7 + x^5 + x^2 + x + 1$ над $\mathbb{F}_2$;
б) $x^6 - x^3 - x - 1$ над $\mathbb{F}_3$.

Задача 3. Разложите многочлен $x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$ на множители над $\mathbb{Z}/3$ и поднимите разложение до $\mathbb{Z}/9$.

Задача 4. Пусть f — многочлен без кратных множителей над полем $\mathbb{F}_q$. Покажите, что

а) если $f(x)$ — неприводимый степени n, то $x^{q^n} - x \vdots f(x)$.
б) если $f(x)$ многочлен степени n, то НОД$(f(x), x^{q^k} - x)$ равен произведению всех неприводимых сомножителей $f(x)$, чья степень делит k. Так же покажите, что указанный НОД$(f(x), x^{q^k} - x)$ может быть вычислен за $O(\log k)$. (Вспомните эндоморфизм Фробениуса).

Задача 5. Разложите на множители над вещественными числами и используя закон взаимности покажите, что многочлен $x^4 + 1$ приводим по любому простому модулю, в то время как является неприводимым над $\mathbb{Z}$.

Дополнительно

Задача 6. Докажите, что над полем $K = \mathbb{F}_{2^d}$ для любых многочленов $f(x), g(x) \in K[x]$, где f не имеет кратных множителей, имеет место разложение

$$f(x) = \text{НОД}(f(x), U(g(x))) \cdot \text{НОД}(f(x), U(g(x)) + 1),$$

где

$$U(x) = x + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2^d}.$$

Задача 7. Покажите, что многочлен $(x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ при различных целых a_i.

Задача 8. Покажите, что многочлен $x^{105} - 9$ неприводим над $\mathbb{Z}$