Компьютерное зрение '2014. Лекция 3.

Who? Александр Вахитов

When? October 7, 2014

План лекции

АЧХ

Преобразование Фурье

- Наводящие соображения
- Определение
- Дискретное преобразование Фурье
- Свойства

Дискретизация (сэмплинг)

- Пояснение задачи
- Математическая формулировка
- Теорема Найквиста - Котельникова
- От модулированного “гребня Дирака” к дискретному сигналу

Задачи

Амплитудно-частотная характеристика

Подадим на вход системы гармонический сигнал $e^{j\omega n}$. Получим:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right).$$

Определение

Амплитудно-частотная характеристика:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}.$$

Отсюда:

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}.$$

Свойства АЧХ

1

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}),\ r \in \mathbb{Z}.$$

2

$$|H(e^{j\omega})| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|,$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \implies |H(e^{j\omega})| < \infty.$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе

$$x[n] = Acos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}.$$

Пусть

$$x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n},\ x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

Тогда

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n].$$

Обозначим $y_1[n] = T(x_1[n])$, $y_2[n] = T(x_2[n])$. Тогда,

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n].$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе (продолжение)

По определению, если

$$x_0[n] = e^{j\omega n},$$

на выходе будет

$$y_0[n] = H(e^{j\omega n})e^{j\omega n}.$$

Для $x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ на выходе получим

$$y_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}H(e^{j\omega_0 n})e^{j\omega_0 n}.$$

аналогично, для $x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$

$$y_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}H(e^{-j\omega_0 n})e^{-j\omega_0 n}.$$

АЧХ для синусоидального сигнала на входе (продолжение)

$$
\begin{aligned}
y[n] =& \frac{A}{2} e^{j\phi} H(e^{j\omega_0 n}) e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} H(e^{-j\omega_0 n}) e^{-j\omega_0 n} \\
=& A|H(e^{j\omega_0 n})|(\frac{e^{j(\phi+\theta)} e^{j\omega_0 n} + e^{-j(\phi+\theta)} e^{-j\omega_0 n}}{2}) \\
=& A|H(e^{j\omega_0})| cos(\omega_0 n + \phi + \theta).
\end{aligned}
$$

Вывод При подаче на вход синусоидального сигнала, на выходе получим синусоидальный сигнал, сдвинутый по фазе и домноженный на коэффициент.

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная}, \ 0 < a < 1.$$

$$h[n] =$$

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная}, \ 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная, } 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

АЧХ

$$H(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2acos\omega}.$$

Пример АЧХ

Система

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \text{ причинная, } 0 < a < 1.$$

$$h[n] = a^n u[n]$$

АЧХ

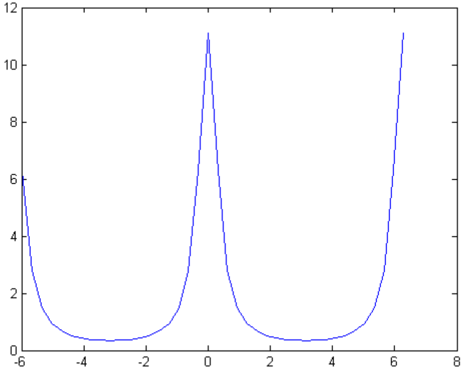
$$H(e^{j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 + a^2 - 2acos\omega}.$$

Пример АЧХ: график амплитуды АЧХ

$|H(e^{j\omega})|^2$:



абсцисса - $\omega \in (-2\pi, 2\pi)$.

Пример АЧХ: Частота

$$arg(z) = atan(\frac{Imz}{Rez}).$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}.$$

$$arg(H(e^{j\omega})) = atan(\frac{a\ \sin(\omega)}{1 - a\ \cos(\omega)})$$

Резюме

Амплитудно-частотная характеристика $H(e^{j\omega})$ -

1 функция непрерывного аргумента ω

2 периодическая функция по ω ($e^{j(\omega+2\pi k)n} = e^{j\omega}$)

Импульсная характеристика из АЧХ

Вспомним:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Докажем, что

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}]e^{j\omega k}d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)}d\omega = h[k].$$

Преобразование Фурье

Определение Преобразование Фурье сигнала $x[n]$ - функция $X(e^{j\omega})$ непрерывной переменной ω:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Определение Обратное преобразование Фурье - формула синтеза сигнала по его п.Ф.:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\theta},$$

$$\theta = arg(X(e^{j\omega})).$$

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Пусть $x[n] \neq 0$ для $n = 0 \dots N - 1$.
ДПФ определяется как:

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega_k n}$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \; k = 0 \dots N - 1$$

Что можем сказать о функциях $e^{-j\omega_k n}$?

Свойства

Теорема о свертке

Преобразование Фурье от свертки $x[n] * h[n]$ есть произведение преобразований Фурье от сворачиваемых сигналов $X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$.

Идея доказательства

$$e^{j\omega n} \to H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Свойства (2)

Свойства

Доказательство

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\implies$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \implies \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\implies$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \implies \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

(верно для всех n) $\Longrightarrow$ $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$.

Свойства (2)

Свойства

$x[n]$ вещественно $\Longrightarrow$

- $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
- $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ четная
- $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ нечетная
- $|X(e^{j\omega})|$ четная
- $arg\ X(e^{j\omega})$ нечетная

Доказательство

$$x[n] = x^*[n] \Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega =$$

(верно для всех n) $\Longrightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$.

Использование ДПФ

- Сложность вычисления ДПФ - $NlogN$ (сложность вычисления свертки по формуле N^2). Поэтому, линейные фильтры эффективно реализовываются с помощью ДПФ.
- Пусть $f(x) = g(x - s)$. Тогда для поиска s по значениям f, g можно применить ДПФ, из свойств которого следует, что $F = e^{j\omega s} G$ для F, G- ДПФ от f, g.
- дискретизация и повышение (понижение) разрешения без эффектов *aliasing*

Фильтры для 2D

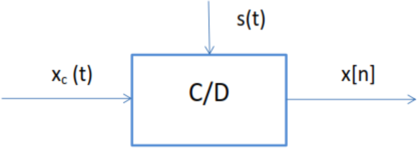
$$y[n,m] = \sum_{n_0=-\infty}^{\infty} \sum_{m_0=-\infty}^{\infty} x[n,m]h[n-n_0, m-m_0]$$

Обычно:

$$y[n,m] = (x[n,m] * h_x[n]) * h_y[m]$$

$$H(e^{j\omega_x}, e^{j\omega_y}) = H_x(e^{j\omega_x})H_y(e^{j\omega_y})$$

Задача дискретизации



Дискретизация с периодом T через модуляцию "гребня Дирака"

- $x_c(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывный сигнал (физический процесс)
- $s(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ "Гребень Дирака", $s(t) = \sum_n \delta(t - nT)$
- $x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ дискретный сигнал

При этом:

$$x[n] = x_c(nT)$$

Математическая формулировка дискретизации

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

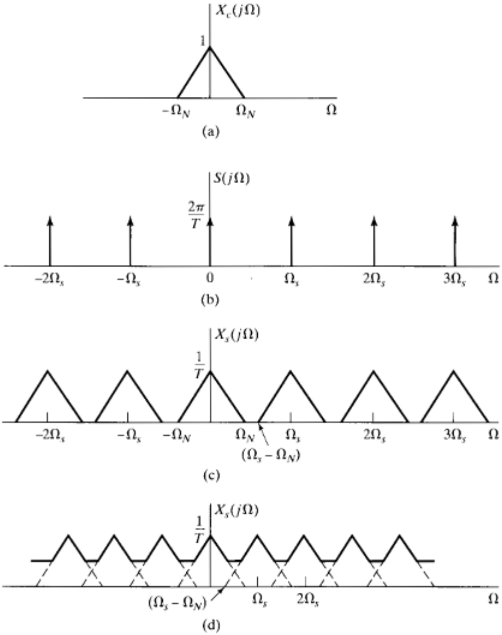
Согласно (Oppenheim, Willsky 1997), $S(j\Omega)$ (непрерывное преобразование Фурье от $s(t)$) равно

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s),$$

для $\Omega_s = 2\pi/T$ (частота дискретизации).

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Наложение спектров (Oppenheim et al. 1998)



Теорема Найквиста-Котельникова

Если у входного сигнала $x_c(t)$ нет частот выше Ω_N, т.е. $X_c(j\Omega) = 0$ при $|\Omega| > \omega_N$, то восстановление $x_c(t)$ по $x_s(t)$ возможно с использованием идеального фильтра нижних частот с частотой среза Ω_c, удовлетворяющей неравенству

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N),$$

где $\Omega_s = 2\pi/T$.

Переход от модулированного гребня к дискретному сигналу

Для $x_s(t)$ справедливо

$$x_s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Вычислим преобразование Фурье модулированного сигнала $x_s(t)$:

$$X_s(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) e^{-j\Omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega nT}.$$

С другой стороны, $x[n] = x_c(nT)$, поэтому

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega n},$$

Переход от модулированного гребня к дискретному сигналу (2)

Спектры модулированного и дискретного сигналов совпадают:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = X(e^{j\Omega T}).$$

В итоге,

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

или

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T})).$$

Задачи

Определить преобразование Фурье для

- $$x[n] = \delta[n-3]$$
- $$x[n] = 0.5\delta[n+1] + \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$
- $$x[n] = a^n u[n],\ 0 < a < 1$$

Задачи (2)

Пусть есть линейный стационарный фильтр непрерывного сигнала с импульсной характеристикой $h_a(t)$ и дискретный линейный стационарный фильтр с импульсной характеристикой $h_d[n]$.

$$h_a(t) = \begin{cases} ae^{-at}, & t \geq 0, a > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Определить АЧХ аналогового фильтра, сделать набросок его амплитудной характеристики
- Если $h_d[n] = ch_a(nT)$, определить АЧХ дискретного фильтра и такое значение c, что для $\omega = 0$ фильтр усиливает сигнал с коэффициентом 1. Сделать набросок амплитудной характеристики $H_d(e^{j\omega})$.