Домашнее задание №3

1. Найдите следующие пределы:

$$а)(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x};\quad б)(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}(x^2)};$$

$$в)(1)\ \lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1});\quad г)(1)\ \lim_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x};$$

$$д)(1)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2};\quad е)(1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{1/x^2};\quad ё)(3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}.$$

2. (2) а) Пусть $a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$, $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что $a_n=\ln\ln n+o(\ln\ln n), n\to+\infty$.

б)(2) Докажите, что найдется константа $C\in\mathbb{R}$, т.ч. $a_n=\ln\ln n+C+o(1), n\to+\infty$.

3. Найдите разложение в ряд Тейлора следующих функций при $x\to 0$ до $o(x^3)$:

$$а)(1)\ \frac{1}{2x+3};\quad б)(1)\ \ln(3-2x);\quad в)(4)\ \ln\frac{5+x}{3-x};\quad г)(1)\ e^x\ln(1+2x).$$

Познакомьтесь с гиперболическим синусом $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и гиперболическим косинусом $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

4. Найдите пределы:

$$а)(6)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-\arcsin x}{\operatorname{sh}(x-x^2)-\ln\sqrt{1+2x}};\quad б)(4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(xe^x)+\sin(xe^{-x})-2x-\frac{2}{3}x^3}{x^5};$$

$$в)(5)\ \lim_{x\to 0}\left(\cos(2x)+\frac{xe^x}{1-x}-x\right)^{\frac{1}{x^2}};\quad г)(5)\ \lim_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\arcsin(x)}\right)^{\frac{1}{x}+\ln^2 x};$$

$$д)(5)\ \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-\sin(x-1)-2\cos(x-1)}{\arctan(x-1)-\ln(x)};\quad е)(6)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{e^x-\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{x^6-x^7}}}{e^{-1}(1+x)^{1/x}-\sqrt{1-x+7x^2/6}}.$$

5. (2) Пусть P_n — периметр правильного $n-$угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{P_{n+1}-P_n}{P_{n+2}-P_{n+1}}$.

6. (1) Докажите, что если функция $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ непрерывна и инъективна, то она строго монотонна.

Дополнительные задачи к домашнему заданию №1

7. Вычислить в явном виде $N(\varepsilon)$ и предел для последовательностей

$$а)\ (1)\ \left(1+\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{2n^2+17};\quad б)\ (1)\ n\ln\left(1+\sin\left(\tfrac{2}{n+3}\right)\right);$$

8. (2) На графике $y=x^2$ задаются точки A_n и B_n с абсциссами соответственно $\frac{1}{n}$ и $-\frac{1}{n}$. Через A_n, B_n и начало координат проводится окружность с центром в точке C_n. Найдите предел последовательности точек C_n.

9. (1) Докажите по определению предела $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{1}{4}$. Явно укажите $\delta(\varepsilon)$.

10. (1) Для последовательности $\{x_n\}$ докажите, что предел существует и найдите его: $x_1>-1$, $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$.

11. (1) Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям: $x_1>0$, $y_1>0$, $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$ Доказать, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

12. (3 балла) Докажите, что последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $x_{n+1}=x_n\sin x_n$, сходится.

13. (3) Пусть $a>0$ и $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$ (n корней). Докажите, что последовательность сходится к пределу (обозначим его l_a) и

$$l_a-x_n=O\left(\frac{1}{(2l_a)^n}\right) \text{ при } n\to+\infty$$

при некотором $C_a>0$.

Дополнительные задачи к домашнему заданию №2

14. Вычислите пределы а) (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(2\sqrt[n]{x}-1)^n$ при $x\geqslant 1$; б) (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$

15. (1) Пусть $x_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n+\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. Найдите $\varlimsup x_n$ и $\varliminf x_n$.

16. (2) Найдите предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}\ln n}.$$

17. Вычислить пределы а) (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^n n!}{(3n)^n}$, б) (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{(n!)^3}{n^{3n}e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$ в) (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.