Treewidth II (ДЗ).

5 ноября 2017 г.

1. Докажите, что $\frac{pw(G)}{\log n} \le tw(G) \le pw(G)$.

2. Пусть T дерево. Покажите, что $pw(t) \ge k+1$ тогда и только тогда когда существует вершина $u \in T$ и ее соседи v_1, v_2, v_3 такие, что $pw(T_{uv_1}), pw(T_{uv_3}), pw(T_{uv_3}) \ge k$. Где T_{uv_i} — это максимальное поддерево T содержащее вершину v_i, но не содержащее вершину u.

3. Покажите, что $pw(T_h) = \frac{h}{2}$, где T_h — полное бинарное дерево высоты h(оценку сверху мы уже доказали).

4. Решите задачу о наибольшем индуцированном двудольном подграфе за время $3^k poly(n)$, если дано древесное разложение ширины k.

5. Постройте алгоритм для задачи о раскарашиваемости графа в q цветов с временем работы $q^k poly(n)$, если дано древесное разложение ширины k.

6. Для заданной функции $f : 2^U \to \mathbf{Z}_{+,\mathbf{0}}$ найдите за $2^n \log^2 M poly(n)$ время f-width множества U, где $|U| = n$ и $f(S) \le M$ для любого $S \subseteq U$. f-width равняется $\min_T \max_{T_v \subseteq T,} f(T_v)$, здесь минимум берется по всемм бинарным деревьям и в листьях у дерева указаны элементы U, а максимум по всем полным поддеревьям с корнем в вершине v.

7. Проанализируйте насколько может увеличиться $pw(G)$, если на некоторые ребра разбить на два, то есть расположить вершину посередине ребра, такую операцию разрешено производить несколько раз.

8. По графу бегает грабитель и летают очень медленно полицейские. Грабитель может перебежать из одной вершину в другую, если есть путь из одной вершины в другую на котором не встречаются полицейские. Полицейские могут попасть из любой вершины в любую другую, но делают это медленно. Покажите, что если $tw(G) \le k$, то $k+1$ полицейский могут поймать грабителя. Мы считаем, что и грабитель и полицейские знают точные местоположения всех участников все время.