Основные операции над производящими функциями

1 Комбинаторный смысл сложения и умножения производящих функций

1.1. Во второй главе мы ввели понятие обыкновенной и экспоненциальной производящих функций как элементов колец формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[z]]$ и $\mathbb{C}_e[[z]]$, а также выписали формулы, позволяющие складывать и перемножать такие ряды. Настало время понять, какой же комбинаторный смысл имеют подобного рода операции.

1.1.1. Рассмотрим пару конечных или счетных множеств X, Y. Поставим в соответствие каждому из этих множеств некоторые обыкновенные ($f(z)$ и $g(z)$) или экспоненциальные ($F(z)$ и $G(z)$) производящие функции. Так как производящие функции являются элементами кольца формальных степенных рядов, то их можно складывать и перемножать между собой. Разберем вначале комбинаторный смысл сложения пары экспоненциальных или обыкновенных производящих функций.

Пример 1.1. Пусть X есть счетное множество всех *связных* графов. Приписывая любому такому графу, построенному на n-элементном множестве U_n вершин, вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$, мы сопоставляем множеству X экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество всех связных графов, которые мы можем построить на n-элементном множестве U_n.

Далее, пусть Y есть счетное множество всех *несвязных* графов, и пусть любому такому графу, построенному на n-множестве вершин U_n, также приписывается вес $z^n/n! \in \mathbb{C}_e[[z]]$. Тем самым мы ставим в соответствие множеству Y экспоненциальную производящую функцию

$$G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой подсчитывают количество всех возможных способов построить несвязный граф на n-элементном множестве вершин U_n.

Теперь практически очевидно, что производящая функция

$$H(z) = F(z) + G(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\frac{z}{1!} + (a_2 + b_2)\frac{z^2}{2!} + \ldots + (a_n + b_n)\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

соответствует счетному множеству Z всех графов, а ее коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ описывают общее количество всех (и связных, и не связных) графов, построенных на n-множестве U_n.

1.1.2. Аналогичный комбинаторный смысл имеет операция сложения пары производящих функций (обыкновенных или экспоненциальных) и в общем случае. Именно, пусть у нас имеется пара *непересекающихся* множеств X и Y каких-то дискретных структур. Пусть, далее, каждому из этих множеств поставлена в соответствие некоторая производящая функция. Тогда сумма этих

функций описывает множество Z, представляющее собой объединение множеств X и Y, а коэффициенты $c_n = a_n + b_n$ этой суммы подсчитывают общее количество дискретных структур (т.е. структур, принадлежащих как множеству X, так и множеству Y), которых мы можем построить на некотором n-элементном множестве U_n.

1.2. Несколько более нетривиальна комбинаторная интерпретация произведения пары производящих функций. Начнем с объяснения комбинаторного смысла произведения пары экспоненциальных производящих функций

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \dots \qquad \text{и} \qquad G(z) = b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \dots .$$

1.2.1. Напомним, что произведением этих функций называется формальный степенной ряд $H(z) \in \mathbb{C}_e[[z]]$ вида

$$H(z) = F(z)\cdot G(z) = c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \dots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}. \tag{1}$$

Комбинаторный смысл этой операции следующий. Пусть a_n — это количество способов совершить какое-то комбинаторное действие или построить какую-либо дискретную структуру на n-элементном множестве U_n, b_n — это количество способов совершить еще какое-то комбинаторное действие или построить еще какую-либо дискретную структуру на том же самом n-множестве U_n. Тогда c_n есть количество способов совершить следующие комбинаторные действия: разбить всеми возможными способами n-множество U_n на два попарно непересекающихся подмножества размерами i и $(n-i)$ соответственно, совершить над i элементами первого подмножества первое комбинаторное действие a_i способами, а затем совершить над оставшимися $(n-i)$ элементами второго подмножества второе комбинаторное действие b_{n-i} способами.

Действительно, для любого фиксированного $i = 0, 1, \dots, n$ мы можем $\binom{n}{i}$ способами выбрать элементы первого подмножества. Оставшиеся $(n-i)$ элементов второго подмножества выбираются при этом однозначно. Пусть для какого-то фиксированного разбиения мы a_i способами совершаем первое комбинаторное действие над элементами первого подмножества, и b_{n-i} способами совершаем второе комбинаторное действие над элементами второго подмножества. Тогда, согласно правилу произведения, для данного разбиения имеется $a_i b_{n-i}$ способов совершить оба этих действия. Умножая теперь произведение $a_i b_{n-i}$ на биномиальный коэффициент $\binom{n}{i}$ и меняя i от нуля до n, мы и получаем, что общее количество способов совершить описанные выше действия равно

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{i}a_i b_{n-i}.$$

1.2.2. Рассмотрим несколько типичных примеров использования комбинаторного смысла произведения экспоненецциальных производящих функций.

Пример 1.2. Пусть у нас в аудитории имеется n студентов. Предположим, что нам нужно как-то разбить это множество студентов на две подгруппы, одну из них оставить в этой аудитории слушать лекцию, а вторую отправить в соседнюю аудиторию решать задачи. При этом во второй подгруппе нам нужно выбрать одного из студентов сходить за ключом от той аудитории, в которой подгруппа будет заниматься. Спрашивается, сколько существует возможных способов совершить эти действия.

Решение. Построим решение этой задачи с помощью производящих функций. Над студентами первой подгруппы мы никаких дополнительных действий не совершаем, поэтому $a_n = 1$. Во второй подгруппе нам нужно выбрать одного студента, который пойдет за ключом. Это можно сделать $b_n = n$ способами. Поэтому

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z, \qquad G(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots = z \cdot e^z.$$

Следовательно,

$$H(z) = F(z) \cdot G(z) = z \cdot e^{2z} = z + 2\frac{z^2}{1!} + 2^2\frac{z^3}{2!} + \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = n \cdot 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Пример 1.3. Рассмотрим множество S всех перестановок. Известно, что количество c_n перестановок n-элементного множества $U_n = [n]$ чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно $n!$. Следовательно, экспоненциальная производящая функция для множества S имеет вид

$$S(z) = 1 + 1!\frac{z}{1!} + 2!\frac{z^2}{2!} + \ldots = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Пусть σ_n есть некоторая произвольная перестановка элементов множества $[n]$. В этой перестановке какие-то i чисел, $i = 0, 1, \ldots, n$, остаются неподвижными, а остальные $(n - i)$ элементов меняют свое положение. Пусть D_n есть количество перестановок рассматриваемого множества $[n]$, в которых все элементы меняют свое положение, a_n — количество перестановок, при которых все элементы остаются на месте. Очевидно, что $a_n = 1$ для любого n. Постараемся найти явное выражение для чисел D_n.

Решение. Введем для этого экспоненциальные производящие функции

$$E(z) = 1 + 1\frac{z}{1!} + 1\frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z \qquad \text{и} \qquad D(z) = D_0 + D_1\frac{z}{1!} + D_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

отвечающие числовым последовательностям $a_n = 1$ и D_n. В соответствии с комбинаторным смыслом произведения таких функций имеем

$$S(z) = E(z) \cdot D(z) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{1-z} = e^z \cdot D(z).$$

Следовательно,

$$D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z},$$

откуда сразу же получается явное выражение для чисел d_n:

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \tag{2}$$

1.2.3. Задача определения чисел D_n в элементарной комбинаторике известна как задача о беспорядках. Она достаточно часто встречается в различных школьных олимпиадных задачах по математике в самых разнообразных формулировках. Одна из возможных ее переформулировок такова. Преподаватель проводит тестирование n студентов, а затем просит студентов обменяться ответами и проверить эти тесты так, чтобы никто не проверял свою собственную работу. В этом случае D_n есть количество возможных способов совершить эти действия.

Исторически впервые эти числа появились в 1708 году в работах французского математика Пьера Монмора. Монмор рассматривал две колоды карт, по n карт в каждой колоде, и поставил задачу о подсчете раскладок карт во второй колоде, при которых они бы не повторялись с картами первой колоды при смещении обеих колод на любое, но одинаковое количество карт (так называемая задача о смещениях — displacements problem).

Свойства чисел D_n напоминают свойства обычного факториала. Так, например, числа D_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$D_{n+1} = n\,(D_n + D_{n-1}) \quad \forall\ n > 1; \qquad\qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0. \tag{3}$$

Это же рекуррентное соотношение, но с другими начальными условиями, выполняется и для обычных факториалов:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!), \quad \forall\ n > 1; \qquad\qquad 0! = 1, \quad 1! = 1.$$

Дональд Кнут [4] в этой связи предложил называть эти числа субфакториалами и ввел для них обозначение $D_n \equiv !n$.

1.2.4. В дальнейшем нам, наряду с произведением пары экспоненциальных производящих функций, понадобятся как формулы, так и комбинаторный смысл произведения нескольких ($k \geqslant 2$) таких функций.

Определение 1.4. Произведением k экспоненциальных производящих функций

$$F_m(z) = a_{m,0} + a_{m,1}\frac{z^1}{1!} + a_{m,2}\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

называется формальный степенной ряд вида

$$H(z) = F_1(z) \cdot F_2(z) \cdot \ldots \cdot F_k(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

в котором коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\ldots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{k-1}}{i_k} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{k,i_k} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=n,\\ 0\leqslant i_m\leqslant n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_k!} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\ldots a_{k,i_k}.$$

Комбинаторный смысл этого действия достаточно очевиден. Мы берем n-элементное множество, $\binom{n}{i_1}$ количеством способов выбираем в нем первое подмножество и совершаем над i_1 элементами этого подмножества первое комбинаторное действие a_{1,i_1} количеством способов. Затем из оставшегося $(n-i_1)$-элементного множества мы выбираем $\binom{n-i_1}{i_2}$ количеством способов второе подмножество и совершаем над его i_2 элементами второе комбинаторное действие a_{2,i_2} количеством способов. Продолжая далее, мы на k-м шаге получаем подмножество размером i_k, над которым мы a_{k,i_i} способами совершаем k-е комбинаторное действие. Если мы теперь переберем всевозможные разбиения такого рода, мы и получим, что c_n описывает общее количество способов совершить все эти комбинаторные действия.

1.3. Перейдем теперь к комбинаторной интерпретации произведения обыкновенных производящих функций. Напомним, что произведением пары таких функций

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

называется формальный степенной ряд вида

$$h(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}. \tag{4}$$

В случае k таких функций

$$f_m(z) = a_{m,0} + a_{m,1} z + a_{m,2} z^2 + \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots, k$$

их произведением является функция

$$h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

коэффициенты c_n в которой рассчитываются по формуле

$$c_n = \sum_{\substack{i_1 + \ldots + i_k = n, \\ 0 \leqslant i_m \leqslant n}} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{k,i_k}.$$

1.3.1. Наиболее часто встречающейся на практике комбинаторной интерпретацией такого рода операции является формулировка, связанная с комбинаторными действиями над неразличимыми предметами. Именно, пусть имеется n неразличимых предметов, и пусть a_n и b_n есть количество способов совершить над этими предметами какие-то комбинаторные действия. Тогда c_n перечисляет все возможные способы разбиения совокупности n неразличимых предметов на два различимых, возможно пустых, блока, совершения над i элементами, попавшими в первый блок, первого комбинаторного действия a_i количеством способов, а над элементами, попавшими во второй блок, второго комбинаторного действия b_{n-i} количеством способов. Обобщение этой интерпретации на случай произведения k обыкновенных производящих функций очевидно.

Пример 1.5. Самой простой, но в то же время важной задачей, связанной с такого рода интерпретацией произведения обыкновенных производящих функций, является задача о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. В качестве основной производящей функции в этой задаче выступает обыкновенная производящая функция

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой имеют следующий комбинаторный смысл: $a_n = 1$, если нам разрешено положить n предметов в выбранный ящик, и $a_n = 0$ в случае, если нам это делать запрещено. Например, производящая функция вида

$$f_{\leqslant 1}(z) = 1 + z$$

означает, что в выбранный ящик я могу либо ничего не положить ($a_0 = 1$), либо положить ровно один неразличимый предмет ($a_1 = 1$). Равенство нулю коэффициентов a_n, $n > 1$ означает, что в ящике запрещается размещать два и более предметов.

Рассмотрим теперь ящик, описывающийся производящей функцией вида

$$f_{\geqslant 1}(z) = z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

В такой ящик мы можем положить один, два и более предметов. Важно, что хотя бы один предмет в такой ящик мы положить обязаны.

Наконец, функция

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

описывает ситуацию, при которой всякие ограничения на количество предметов в ящике отсутствуют.

Тогда, например, в соответствии с комбинаторным смыслом произведения k обыкновенных производящих функций, коэффициенты c_n обыкновенной производящей функции, отвечающей произведению k функций $f_{\leqslant 1}(z)$, дают нам количество способов раскладки n неразличимых предметов по k различимым ящикам при условии, что ни в один из этих ящиков я не могу положить более одного предмета. Эти коэффициенты определяются из формулы

$$h(z) = f^k_{\leqslant 1}(z) = (1+z)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \binom{k}{n}.$$

В случае отсутствия ограничений на количество предметов в одном ящике аналогичные рассуждения дают производящую функцию

$$h(z) = f^k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)^k = \frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) z^n \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right).$$

Наконец, в случае, когда в каждый ящик нам необходимо положить хотя бы один предмет, имеем

$$h(z) = f^k_{\geqslant 1}(z) = (z + z^2 + \ldots)^k = \frac{z^k}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{k}{n}\!\!\right) z^{n+k} \quad \Longrightarrow \quad c_n = \left(\!\!\binom{k}{n-k}\!\!\right) = \binom{n-1}{k-1}.$$

1.3.2. Мы продемонстрировали, как с помощью описанного выше подхода решаются три основные наши задачи о раскладке n неразличимых предметов по k различимым ящикам. Однако, пользуясь этим подходом, мы довольно просто можем решать и множество других, самых разнообразных задач того же рода.

Пример 1.6. Решим задачу раскладки n неразличимых предметов по трем ящикам при условии, что в первый ящик мы можем положить ровно один предмет, во второй — не более одного предмета, а в третий — два, четыре или пять предметов. На языке производящих функций это означает, что

$$f_1(z) = z, \qquad f_2(z) = 1 + z, \qquad f_3(z) = z^2 + z^4 + z^5.$$

Для определения же общего количества способов раскладки n неразличимых предметов по таким трем ящикам нам необходимо вычислить произведение

$$h(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot f_3(z) = z(1+z)(z^2 + z^4 + z^5) = z^3 + z^4 + z^5 + 2z^6 + z^7.$$

Отсюда, в частности, следует, что семь предметов в эти ящики мы можем разложить лишь одним способом.

1.3.3. Заметим сразу же, что использование экспоненциальной производящей функции

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты которой имеют тот же комбинаторный смысл, что и у функции $f(z)$ предыдущего пункта, позволяет столь же эффективно решать аналогичные задачи о раскладке n *различимых* предметов по k различимым ящикам. Рассмотрим, к примеру, производящую функцию

$$F_{\leqslant 1}(z) = 1 + \frac{z}{1!} = 1 + z.$$

Она описывает ситуацию, когда в один ящик я могу положить не более одного предмета. Тогда количество способов раскладки n различимых предметов по k различимым же ящикам при наличии такого ограничения на количество предметов в ящике определяется как коэффициент c_n при $z^n/n!$ в разложении функции $H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k$:

$$H(z) = [F_{\leqslant 1}(z)]^k = (1+z)^k = 1 + k\frac{z}{1!} + k(k-1)\frac{z^2}{2!} + \ldots + k(k-1)\ldots(k-n+1)\frac{z^n}{n!} + \ldots + z^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{k}(k)_n\frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = (k)_n = k(k-1)\ldots(k-n+1).$$

Использование производящей функции вида

$$F(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z$$

позволяет легко решить задачу о количестве способов раскладки n различимых предметов по k различимым ящикам при отсутствии ограничений на количество предметов в каждом ящике: возводя эту функцию в k-ю степень, имеем

$$H(z) = [F(z)]^k = e^{kz} = \sum_{n=0}^{+\infty} k^n\frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad c_n = k^n.$$

Наконец, ситуации, когда в данный ящик мы можем положить один или более различимых предметов, отвечает производящая функция вида

$$F_{\geqslant 1}(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = e^z - 1.$$

Для того, чтобы решить с ее помощью задачу о раскладке n различимых предметов по k различимым ящикам при условии, что в любом ящике должен находиться хотя бы один предмет, нужно возвести $F_{\geqslant 1}(z)$ в k-ю степень и воспользоваться биномом Ньютона для вычисления коэффициентов при z^n:

$$H(z) = [F_{\geqslant 1}(z)]^k = (e^z - 1)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}e^{(k-i)z}.$$

Учитывая, что

$$e^{(k-i)z} = 1 + (k-i)\frac{z}{1!} + (k-i)^2\frac{z^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(k-i)^n\frac{z^n}{n!},$$

окончательно получаем

$$H(z)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(k-i)^n\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\Big]=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{S}(n,k)\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\qquad\widehat{S}(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Более того, мы теперь, как и в случае раскладки неразличимых предметов, можем решать с помощью описанной выше техники и довольно сложные задачи смешанного типа.

Пример 1.7. Определить количество способов раскладки n различимых предметов по четырем ящикам при условии, что во второй ящик разрешается класть только четное, а в четвертый — только нечетное число предметов.

Решение. В этом случае

$$F_1(z)=F_3(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=e^z,$$

$$F_2(z)=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$F_4(z)=\frac{z}{1!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

поэтому

$$H(z)=e^{2z}\frac{e^z+e^{-z}}{2}\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{1}{4}\left(e^{4z}-1\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}4^{n-1}\frac{z^n}{n!}\qquad\Longrightarrow\qquad c_n=4^{n-1},\quad n=1,2,\ldots$$

1.3.4. Вернемся к комбинаторному смыслу произведения обыкновенных производящих функций. Мы сказали, что произведение таких функций хорошо подходит для работы с неразличимыми предметами. Однако такая комбинаторная интерпретация не является единственно возможной — мы можем придумать и другие, также чрезвычайно полезные на практике комбинаторные интерпретации произведения обыкновенных производящих функций.

Рассмотрим, к примеру, какое-то *линейно упорядоченное* n-элементное множество X различимых элементов (дни в календаре, люди в очереди, солдаты в строю) [1]. Разбить такое множество на два упорядоченных блока, один из которых состоит из первых i элементов X, а второй — из оставшихся $(n-i)$ элементов, можно, как и в случае неразличимых элементов, лишь одним способом. Если теперь над элементами первого блока совершить комбинаторное действие a_i способами, а над элементами второго — комбинаторное действие b_{n-i} способами, то при фиксированном i мы получим, по правилу произведения, a_ib_{n-i} способов совершить эти действия одновременно. Суммируя теперь по всем таким i от 0 до n, мы получим общее количество способов совершить такого рода действия, равное коэффициенту c_n при z^n в разложении обыкновенной производящей функции $h(z)=f(z)\cdot g(z)$ в формальный степенной ряд по степеням z.

Пример 1.8. В осеннем семестре у преподавателя n рабочих дней. Преподаватель может поделить семестр, состоящий из n дней, на две части, посвятив первую часть (первые k дней,

$1 \leqslant k \leqslant n-2$) теории, а вторую часть (последние $n-k$ дней) — практическим занятиям. При этом предполагается, что число k преподаватель имеет право выбирать по своему усмотрению. В первой части семестра преподаватель должен предусмотреть тот факт, что ему в один из рабочих дней придется уехать в командировку. Во второй части ему понадобятся два рабочих дня для поездки на конференцию. Сколькими способами преподаватель может совершить эти комбинаторные действия? Использовать производящие функции для получения замкнутого ответа на данную задачу.

Решение. Заметим, прежде всего, что как и в любом множестве, в линейно упорядоченном множестве X количество способов выбрать i из n элементов равняется биномиальному коэффициенту $\binom{n}{i}$. Поэтому количество способов выбора одного элемента из n-элементного линейно упорядоченного множества равно

$$a_n = \binom{n}{1} = n,$$

а количество способов выбора двух элементов равно

$$b_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

При фиксированном k у преподавателя имеется

$$a_k b_{n-k} = k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способов выбрать один день на командировку в первой части семестра и два дня во второй части семестра. Всего же преподаватель может

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способами организовать свою работу в осеннем семестре.

Для нахождения более компактной формы записи этого решения введем для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обыкновенные производящие функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,z^n \qquad \text{и} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,z^n.$$

Заметим, что

$$f(z) = 0 + 1\cdot z + 2\cdot z^2 + \ldots + n\cdot z^n + \ldots = z\cdot(1\cdot z^0 + 2\cdot z^1 + 3\cdot z^2 + \ldots + n\cdot z^{n-1} + \ldots) =$$

$$= z\cdot(1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots)'_z = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Далее,

$$g(z) = 1\cdot z^2 + 3\cdot z^3 + 6\cdot z^4 + 10\cdot z^5 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot z^n + \ldots =$$

$$= \frac{z^2}{2}\cdot(2\cdot 1\cdot z^0 + 3\cdot 2\cdot z^1 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot z^{n-2} + \ldots) =$$

$$= \frac{z^2}{2}(1 + 2\cdot z^1 + \ldots + n\cdot z^{n-1} + \ldots)'_z = \frac{z^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)'_z = \frac{z^2}{2}\cdot\frac{2}{(1-z)^3} = \frac{z^2}{(1-z)^3}.$$

Тогда, согласно комбинаторному смыслу произведения обыкновенных производящих функций, количество h_n способов совершить описанные в упражнении комбинаторные действия описывается производящей функцией

$$h(z) = f(z) \cdot g(z) = \frac{z^3}{(1-z)^5} = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) z^n = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{n} z^n =$$

$$= z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} z^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \binom{n+1}{4} z^n,$$

откуда следует, что

$$c_n = \binom{n+1}{4}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

1.4. Заметим, что до этого момента стандартный способ решения комбинаторных задач состоял у нас в следующем: мы, используя базовые комбинаторные принципы (правило сложения, умножения, а также их обобщения) получали рекуррентные соотношения для искомых чисел, а затем, используя производящие функции как элементы формальных степенных рядов, эти соотношения решали. Теперь же мы, зная комбинаторный смысл основных операций над производящими функциями, можем сразу строить решение задачи в терминах производящих функций.

1.4.1. В качестве характерного примера вернемся к задачам, связанным с числами C_n Каталана. Пусть, как и прежде,

$$f(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots$$

есть обыкновенная производящая функция для последовательности $\{C_n\}$ чисел Каталана, описывающих решение этой задачи. Во второй главе было показано, что эта функция удовлетворяет следующему уравнению:

$$f(z) = 1 + z f^2(z). \tag{5}$$

Оказывается, это уравнение легко интерпретируется (а следовательно, и получается) с использованием комбинаторного смысла сложения и умножения обыкновенных производящих функций. Покажем, как это делается, на примере задачи о перечислении путей Дика на плоскости (рис. 1) и (параллельно) на примере правильной скобочной последовательности.

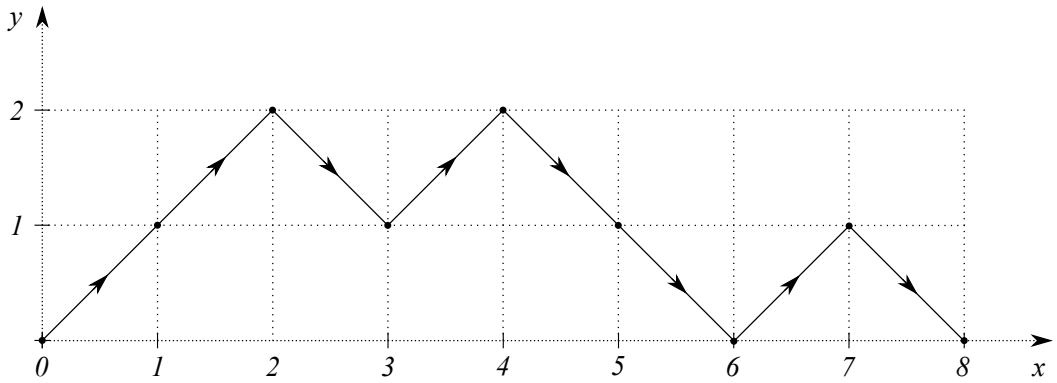


Рис. 1: Путь Дика

1.4.2. Прежде всего, напомним комбинаторный смысл сложения пары производящих функций — он отвечает разбиению множества перечисляемых объектов на два блока. В данной задаче мы все множество путей Дика можем разбить на два непересекающихся подмножества — подмножество, состоящее из тривиального пути Дика, а именно, единственной точки $x = 0$ на плоскости, и подмножество, содержащее все остальные, нетривиальные пути. На языке производящих функций первое подмножество как раз и описывается производящей функцией $h(z) = 1$, то есть единицей в правой части (5). Осталось объяснить второе слагаемое в правой части (5), а именно, произведение трех производящих функций $g(z) = z$, $f(z)$ и $f(z)$.

Для этого воспользуемся комбинаторной интерпретацией произведения обыкновенных производящих функций, связанной с разбиениями линейно упорядоченного множества. В задаче о правильных скобочных последовательностях линейно упорядоченное множество — это множество пар скобок (открывающейся и парной ей закрывающейся), пронумерованных в порядке следования открывающейся скобки. В задаче о путях Дика — это множество, состоящее из однократных подъемов и соответствующих им спусков, пронумерованное в порядке следования подъемов. Так, для правильной скобочной последовательности (()())(), являющейся аналогом изображенного на рис. 1 пути Дика, линейный порядок на множестве пар скобок задается следующим образом:

$$\begin{array}{c} (\ (\ ) \ (\ ) \ ) \ (\ ) \\ 1\,2\,2\,3\,3\,1\,4\,4 \end{array}$$

Теперь заметим, что первая пара скобок в правильной скобочной последовательности разбивает все множество пар скобок на три блока — блок, состоящий из самой этой первой пары скобок, блок, состоящий из пар скобок, попавших внутрь первой пары, а также блок, стоящий правее первой пары скобок. На языке обыкновенных производящих функций это разбиение как раз и описывается произведением вида $z \cdot f(z) \cdot f(z)$. Действительно, обыкновенная производящая функция

$$g(z) = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \ldots,$$

вырезает из всех непустых линейно упорядоченных множеств первый элемент этого множества. Произведение же $z \cdot f(z) \cdot f(z)$ описывает количество способов совершить над линейно упорядоченным множеством пар скобок (подъемов/спусков) следующие комбинаторные действия: разбить это множество на три блока — левый, центральный и правый — так, чтобы левый блок состоял только лишь из одного элемента, а затем построить в оставшихся двух блоках правильные скобочные последовательности (пути Дика).

1.4.3. Уравнение (5) допускает и еще одну полезную комбинаторную интерпретацию. Именно, произведение $z \cdot f(z)$ можно рассматривать как производящую функцию

$$z \cdot f(z) = C_0 \cdot z + C_1 \cdot z^2 + C^2 \cdot z^3 + \ldots + C_{n-1} \cdot z^n + \ldots,$$

описывающую сдвинутую на один шаг вправо числовую последовательность

$$\{0, C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, \ldots\}.$$

Тогда произведение $zf(z) \cdot f(z)$ в правой части (5) можно трактовать следующим образом. Любой нетривиальный путь Дика состоит из шага вверх, произвольного (возможно, пустого) пути Дика из точки с координатами $(1, 1)$ в точку с координатами $(2i - 1, 1)$, из шага вниз, а затем вновь из произвольного (возможно, пустого) пути Дика. Тогда сомножитель $z \cdot f(z)$ как раз и описывает произвольный путь Дика из точки с координатами $(1, 1)$ в точку с координатами $(2i - 1, 1)$, то есть путь Дика, соответствующий числу Каталана C_{n-1}.

2 Понятие композиции обыкновенных производящих функций

2.1. До этого момента мы рассматривали только две основные операции над производящими функциями — сложение и умножение таких функций. Наряду с этими операциями на практике не менее часто используется и еще одна важная и чрезвычайно полезная операция над производящими функциями, а именно, композиция производящих функций. Определение композиции обыкновенных производящих функций в общем случае дать достаточно сложно. Мы рассмотрим здесь только лишь один достаточно частный случай этой операции, который, тем не менее, поможет нам понять комбинаторный смысл операции композиции производящих функций и в более общих ситуациях. Кроме того, этот частный случай позволит нам построить решение целого ряда задач о раскладке неразличимых предметов по различимым ящикам в случае, когда количество k ящиков заранее не фиксировано.

2.1.1. Начнем мы с задачи, которая в [5] называется задачей о наклейке марок на бандероль.

Пример 2.1. За пересылку бандероли нужно уплатить 18 рублей, наклеивая на нее марки. На почте есть марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей в неограниченном количестве. Сколькими способами можно оплатить пересылку бандероли, если два способа, отличающиеся количеством и/или *порядком* наклейки марок, считаются различимыми?

Прежде всего, давайте вручную переберем все возможные способы наклейки марок:

$$\begin{array}{rrrr}
6+6+6=18; & & & \\
10+4+4=18; & 4+10+4=18; & 4+4+10=18; & \\
6+4+4+4=18; & 4+6+4+4=18; & 4+4+6+4=18; & 4+4+4+6=18.
\end{array}$$

Итого имеем 8 различных способов. Наша задача — получить это число алгоритмически, т.е. без ручного перебора всех вариантов.

2.1.2. Попытаемся составить для этой задачи рекуррентное соотношение. Пусть $h(n)$ есть количество способов, которыми можно наклеить марки достоинством в 4, 6 и 10 рублей с учетом порядка их наклейки так, чтобы их общая стоимость равнялась n. Для подсчета $h(n)$ вновь воспользуемся стандартным приемом — разобъем множество всех вариантов на блоки и подсчитаем количество элементов в каждом блоке.

Основное наблюдение здесь состоит в том, что в нашей задаче порядок наклейки марок важен. Поэтому мы можем разбить множество всех вариантов на три блока в зависимости от того, марка какого достоинства была наклеена на бандероль последней. При этом понятно, что количество способов наклеить марки так, чтобы последней шла марка достоинством в i рублей, равно $h(n-i)$. Следовательно, для нашей задачи справедливо рекуррентное соотношение вида

$$h(n) = h(n-4) + h(n-6) + h(n-10),$$

которое нужно дополнить начальными условиями $h(0) = 1$, $h(n) = 0$ при $n < 0$.

2.1.3. Решим теперь это рекуррентное соотношение с помощью производящих функций. Введем для числовой последовательности $h(n) \equiv h_n$ обыкновенную производящую функцию

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$$

Перепишем наше рекуррентное соотношение для удобства в следующем виде:

$$h_{n+10} = h_{n+6} + h_{n+4} + h_n, \qquad n \geqslant 0,$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = h_2 = h_3 = 0,\ h_4 = 1,\ h_5 = 0,\ h_6 = 1,\ h_7 = 0,\ h_8 = 1,\ h_9 = 0.$$

Домножая это соотношение на z^{n+10} и суммируя по всем n, получаем равенство вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+10} z^{n+10} = z^4 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+6} z^{n+6} + z^6 \sum_{n=0}^{+\infty} h_{n+4} z^{n+4} + z^{10} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n z^n \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - h_0 - \ldots - h_9 z^9 = z^4(h(z) - h_0 - \ldots - h_5 z^5) + z^6(h(z) - h_0 - \ldots - h_3 z^3) + z^{10} h(z) \ \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\ h(z) - 1 - z^4 - z^6 - z^8 = z^4(h(z) - 1 - z^4) + z^6(h(z) - 1) + z^{10} h(z) \ \Longleftrightarrow$$

$$h(z)[1 - z^4 - z^6 - z^{10}] = 1 + z^4 + z^6 + z^8 - z^4 - z^8 - z^6 = 1,$$

из которого несложно получить явное выражение для искомой обыкновенной производящей функции:

$$h(z) = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})} = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \ldots$$

При этом ответ на поставленную задачу при фиксированной стоимости n бандероли равен коэффициенту при z^n в разложении этой функции $h(z)$ по степеням z:

$$h(z) = 1 + z^4(1 + z^2 + z^6) + z^8(1 + z^2 + z^6)^2 + z^{12}(1 + z^2 + z^6)^3 + z^{16}(1 + z^2 + z^6)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + z^4 + z^6 + z^8 + 3z^{10} + 2z^{12} + 5z^{14} + 6z^{16} + 8z^{18} + 13z^{20} \ldots$$

Отсюда, в частности, следует, что при $n = 18$ количество различных способов наклеить марки равно восьми.

2.1.4. Заметим теперь, что ответ на задачу, записанный в виде

$$h(z) = 1 + (z^4 + z^6 + z^{10}) + (z^4 + z^6 + z^{10})^2 + \ldots + (z^4 + z^6 + z^{10})^k + \ldots$$

имеет достаточно очевидную комбинаторную интерпретацию на языке обыкновенных производящих функций в духе рассуждений предыдущего параграфа.

Именно, введем производящую функцию

$$f(z) = 0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^3 + 1 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + 1 \cdot z^6 + 0 \cdot z^7 + 0 \cdot z^8 + 0 \cdot z^9 + 1 \cdot z^{10} + 0 \cdot z^{11} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество способов положить n неразличимых предметов в один единственный ящик. То, что $a_n = 0$ для всех $n \neq 4, 6, 10$, означает, что в данный ящик нам запрещено класть предметы, количество которых отлично от четырех, шести или десяти.

Теперь переформулируем исходную задачу о наклейке марок в терминах раскладки неразличимых предметов по ящикам. На языке раскладки предметов по ящикам наклеить на m-е место марку достоинством в i рублей означает поместить в m-й ящик i неразличимых предметов (например, i рублевых монет). Тогда при фиксированном числе k наклеиваемых марок (или, что тоже самое, при фиксированном числе k ящиков) количество способов наклеить марки общей

стоимостью в n рублей (или количество способов разложить n неотличимых друг от друга рублевых монет по k различимым ящикам) равно коэффициенту при z^n у производящей функции вида

$$h_k(z) = (z^4 + z^6 + z^{10})^k = [f(z)]^k.$$

Однако в рассматриваемой задаче число k может быть любым. На языке производящих функций это означает, что для подсчета общего количества способов раскладки n неразличимых предметов *по заранее не фиксированному* числу различимых ящиков мы должны просуммировать все такие функции $h_k(z)$ по всем возможным значениям k:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} h_k(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} [f(z)]^k = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - (z^4 + z^6 + z^{10})}.$$

2.1.5. Приведенные выше рассуждения легко обобщаются на случай задачи о наклейке s различных марок достоинством в $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_s$ рублей каждая. Для этого введем производящую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

коэффициенты a_n которой равны единице в случае, когда n равно одному из чисел $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_s$, и нулю во всех остальных случаях:

$$f(z) = 1 \cdot z^{i_1} + 1 \cdot z^{i_2} + \ldots + 1 \cdot z^{i_s}.$$

Тогда количество $h(n)$ различных вариантов наклейки s марок с учетом их порядка на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть коэффициент при z^n в разложении производящей функции

$$h(z) = \frac{1}{1 - (z^{i_1} + z^{i_2} + \ldots + z^{i_s})} = \frac{1}{1 - f(z)}$$

по степеням z.

В частности, в случае наличия на почте марок любого достоинства (т.е. марок стоимостью в один рубль, в два рубля и так далее) в неограниченном же количестве производящая функция

$$f(z) = z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{z}{1 - z},$$

а решение задачи описывается функцией

$$h(z) = \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{1 - \dfrac{z}{1 - z}} = \frac{1 - z}{1 - 2z} = 1 + \frac{z}{1 - 2z} = 1 + z + 2z^2 + 4z^3 + \ldots + 2^{n-1}z^n + \ldots$$

Следовательно, в этом случае количество $h(n)$ различных способов наклейки марок на бандероль, стоимость отправки которой равна n, есть 2^{n-1} при $n > 0$ и 1 при $n = 0$. На языке раскладки n неразличимых предметов по заранее не фиксированному количеству различимых ящиков это означает, что существует 2^{n-1} способов такой раскладки при условии, что в каждый из этих ящиков мы можем класть любое отличное от нуля количество предметов.

2.2. Заметим, что с формальной точки зрения сформулированная в предыдущем пункте задача эквивалентна проблеме поиска всех решений в *положительных* целых числах уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \qquad x_k \in \{i_1, \ldots, i_s\} \ \forall k \tag{6}$$

при условии, что порядок слагаемых в левой части этого равенства важен, а количество k этих слагаемых заранее не фиксировано. Возникает вопрос, а возможно ли получить решение такой задачи в *неотрицательных* целых числах?

2.2.1. Попробуем действовать по аналогии. В случае неотрицательных целых чисел производящая функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Формальное применение описанного в предыдущем пункте алгоритма приводит нас в этом случае к функции

$$h(z) = \frac{1}{1-f(z)} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-z}} = \frac{-1+z}{z},$$

которая не имеет смысла с точки зрения описанной во второй главе теории формальных степенных рядов — стоящая в знаменателе функция $g(z) = z$ не имеет обратного элемента по умножению в кольце $C[[z]]$.

В чем же причина нашей неудачи? Дело в том, что уравнение (6) имеет в *неотрицательных* целых числах бесконечное число решений. Действительно, мы можем бесконечным числом способов добавлять в левую часть этого уравнения бесконечное же число нулей. И результат сложения в правой части уравнения от этого, естественно, не изменится. Таким образом, комбинаторная задача в такой постановке смысла не имеет.

2.2.2. Осталось понять, как этот факт отражается на попытке решения задачи с использованием производящих функций. Рассмотрим для этого обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

По определению, положим

$$h(z) = \frac{1}{1-f(z)} := 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots \tag{7}$$

и посмотрим, когда это определение имеет смысл с точки зрения теории формальных степенных рядов.

Предположим вначале, что $a_0 = 0$. В таком случае в правой части (7) всегда будет стоять конечное число слагаемых при степенях z^n, $n > 0$. Действительно,

$$[f(z)]^k = (a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^k = z^k (a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots)^k.$$

Поэтому при всех значениях $k > n$ любая производящая функция вида $[f(z)]^k$ будет содержать только степени z, большие n. Как следствие, для того, чтобы сосчитать коэффициент при z^n у функции $h(z)$, достаточно ограничиться конечной суммой

$$1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^n.$$

Пусть теперь $a_0 \neq 0$. В этом случае *любая* степень $[f(z)]^k$ будет содержать слагаемые с z^n. Иными словами, таких слагаемых теперь будет бесконечно много, и подсчет коэффициентов при z^n становится невозможен. Таким образом, при $a_0 \neq 0$ операция (7) с точки зрения теории формальных степенных рядов смысла не имеет.

2.2.3. Итак, мы подошли к следующему определению. Пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

есть обыкновенная производящая функция, коэффициент a_0 которой равен нулю. Тогда корректно определена обыкновенная производящая функция

$$h(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + \ldots := \frac{1}{1 - f(z)} = 1 + f(z) + [f(z)]^2 + \ldots + [f(z)]^k + \ldots,$$

представляющая собой композицию $g(f(z))$ пары обыкновенных производящих функций $f(z)$ и $g(z) = 1/(1 - z)$.

2.2.4. Комбинаторный смысл описанной выше операции состоит в следующем. Пусть имеется n неразличимых предметов и пусть существует a_n способов совершить над ними какое-то комбинаторное действие. Предположим также, что $a_0 = 0$, то есть любые комбинаторные действия в случае $n = 0$ отсутствуют. Тогда h_n есть количество способов распределить эти n элементов по какому-то (заранее не фиксированному) числу k линейно упорядоченных непустых блоков, а затем совершить в каждом из таких блоков размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами.

Замечание 2.2. Как и в случае произведения обыкновенных производящих функций, еще одна трактовка комбинаторного смысла композиции $g(f(z)) = 1/(1 - f(z))$ связана с разбиением линейно упорядоченного множества на произвольное, заранее не фиксированное число непустых блоков, а затем с совершением в каждом из этих блоков комбинаторного действия, описываемого функцией $f(z)$.

3 Разбиение числа на слагаемые при отсутствии ограничений на количество слагаемых

3.1. Вернемся к задаче о наклейке марок на бандероль. На практике нас, как правило, не интересует порядок наклейки марок — обычно мы лишь хотим, чтобы стоимость наклеенных марок совпадала со стоимостью отправки бандероли. В такой постановке задача имеет всего три различных решения:

$$18 = 6 + 6 + 6 = 4 + 4 + 10 = 4 + 4 + 4 + 6.$$

В дальнейшем мы увидим, что решение подобного рода задач также связано с операцией композиции обыкновенных производящих функций. Однако сейчас мы покажем, как решить данную задачу непосредственно, на основе сведения ее к задаче о раскладке n неразличимых предметов по *фиксированному* числу k различимых ящиков.

3.1.1. Следуя привычному нам подходу, попытаемся вначале построить рекуррентное соотношение, описывающее количество $\Phi(n; 4, 6, 10)$ способов наклейки марок общей стоимостью n рублей без учета порядка наклеиваемых марок. Для этого разобьем все множество способов наклейки на блоки в зависимости от того, использовалась ли хоть раз марка данного достоинства (например, марка достоинством в 10 рублей) при наклейке марок на бандероль. В случае, если она использовалась, количество способов наклейки марок, очевидно, равно $\Phi(n - 10; 4, 6, 10)$. В случае же, когда она вовсе не использовалась, это количество равно $\Phi(n; 4, 6)$. Следовательно, для чисел $\Phi(n; 4, 6, 10)$ справедливо рекуррентное соотношение вида

$$\Phi(n; 4, 6, 10) = \Phi(n - 10; 4, 6, 10) + \Phi(n; 4, 6).$$

При фиксированном n данный подход позволяет шаг за шагом сосчитать искомое количество вариантов. Однако полученное рекуррентное соотношение имеет один существенный недостаток — искомые числа зависят не только от n, но и от нескольких дополнительных параметров. Это усложняет проведение расчетов по данной формуле. Кроме того, не очень понятно, как получить явное решение этого рекуррентного соотношения.

3.1.2. Оказывается, однако, что поставленная задача достаточно просто решается с помощью производящих функций. Действительно, с формальной точки зрения наша задача сводится к подсчету количества решений уравнения вида

$$4y_4 + 6y_6 + 10y_{10} = n$$

в целых неотрицательных числах. Последнее же уравнение имеет достаточно очевидную трактовку в терминах задачи о раскладке *неразличимых* предметов по *различимым* ящикам, а значит, может быть решена с использованием комбинаторного смысла произведения обыкновенных производящих функций.

Именно, пусть у нас имеется n неразличимых предметов и 3 различимых ящика. В первый из них мы можем складывать предметы лишь в случае, если их количество кратно четырем, во второй — в случае, если их количество кратно шести. Наконец, в последний, третий ящик мы можем складывать предметы в случае, если их количество кратно десяти. Соответствующие этим способам раскладки обыкновенные производящие функции равны

$$\varphi_4(z) = 1 + z^4 + z^8 + \ldots, \qquad \varphi_6(z) = 1 + z^6 + z^{12} + \ldots, \qquad \varphi_{10}(z) = 1 + z^{10} + z^{20} + \ldots,$$

а производящая функция $\varphi(z)$, описывающая общее количество способов раскладки предметов по трем таким различимым ящикам, определяется так:

$$\varphi(z) = \varphi_4(z) \cdot \varphi_6(z) \cdot \varphi_{10}(z) = \frac{1}{(1-z^4)(1-z^6)(1-z^{10})}. \tag{8}$$

В упражнении **??** предлагается получить из формулы (8) следующее рекуррентное соотношение на количество h_n способов наклейки марок на бандероль:

$$h_n = h_{n-4} + h_{n-6} - h_{n-14} - h_{n-16} + h_{n-20}, \tag{9}$$

$$h_0 = 1, \qquad h_n = 0 \quad \forall\, n < 0.$$

Такое рекуррентное соотношение зависит лишь от одного параметра n, а временная сложность алгоритма, построенного на его основе, равна $\mathrm{O}(\log n)$.

3.1.3. Итак, успех в решении рассматриваемой задачи связан, прежде всего, с удачной ее переформулировкой. Именно, нам удалось переформулировать задачу в терминах раскладки n неразличимых предметов по фиксированному числу $k = 3$ различимых ящиков при наличии дополнительных ограничений на количество предметов в каждом ящике, а затем воспользоваться комбинаторным смыслом умножения $k = 3$ производящих функций. Достаточно ясно, как обобщить данный подход на другие задачи подобного типа.

Пусть, например, мы имеем право наклеивать на бандероль не более одной марки данного достоинства. В этом случае производящая функция, описывающая решение такой задачи, имеет вид

$$\varphi(z) = (1+z^4)(1+z^6)(1+z^{10}) = 1 + z^4 + z^6 + 2z^{10} + z^{14} + z^{16} + z^{20}.$$

Мы видим, например, что сумму в 10 рублей мы можем получить двумя способами — наклеивая либо по одной марке достоинствами в 4 и в 6 рублей, либо наклеивая одну марку достоинством в 10 рублей.

С формальной точки зрения данная задача, очевидно, эквивалентна задаче поиска количества решений уравнения

$$4 \cdot y_4 + 6 \cdot y_6 + 10 \cdot y_{10} = n$$

при условии, что все y_m, $m = 4, 6, 10$, равны нулю или единице.

3.2. Описанная выше техника применима к решению и еще одной очень интересной и важной с практической точки зрения задачи — задачи о разбиении заданного числа $n > 0$ на слагаемые.

Определение 3.1. Разбиением целого положительного числа n на слагаемые (или, как еще говорят, на части) называется неупорядоченный набор положительных целых чисел, сумма которых равна n.

Нам хочется подсчитать количество $p(n)$ всех разбиений при фиксированном значении числа n. На языке раскладки предметов по ящикам эта задача равносильна подсчету количества способов раскладки n неразличимых предметов по заранее не фиксированному числу k неразличимых же ящиков при условии, что в каждый ящик мы обязаны положить хотя бы один предмет.

3.2.1. С формальной точки зрения любое разбиение n представляет собой некоторое решение в положительных целых числах уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n \tag{10}$$

при фиксированном $n > 0$ и произвольном $k > 0$. Понятно, что все x_i в этом уравнении ограничены сверху значением $x_i = n$ для любого $i \in [1, k]$. Сам же индекс k, в свою очередь, также ограничен сверху этим значением: случаю $k = n$ отвечает разложение n в сумму n единиц. Таким образом, более точно поставленная нами задача формулируется так:

Задача 3.2. Найти количество $p(n)$ решений в положительных целых числах уравнения (10) при дополнительных ограничениях $0 < x_i \leqslant n \ \forall\ i = 1, \ldots, k$; $0 < k \leqslant n$.

Заметим теперь, что порядок слагаемых в уравнении (10) роли не играет, и поэтому мы для определенности можем всегда считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k > 0$. Это соглашение, в свою очередь, позволяет нам в формулировке задачи избавиться от индекса k, а именно, искать количество $p(n)$ всех целых *неотрицательных* решений уравнения вида

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \qquad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0.$$

3.2.2. Подсчитаем количество $p(n)$ разбиений для нескольких первых значений n:

$$\begin{aligned}
&p(1) = 1: \quad 1 = (1);\\
&p(2) = 2: \quad 2 = (1+1) = (2);\\
&p(3) = 3: \quad 3 = (1+1+1) = (2+1) = (3);\\
&p(4) = 5: \quad 4 = (1+1+1+1) = (2+1+1) = (2+2) = (3+1) = (4);\\
&p(5) = 7: \quad 5 = (1+1+1+1+1) = (2+1+1+1) = (2+2+1) = (3+1+1) =\\
&\qquad\qquad = (3+2) = (4+1) = (5).
\end{aligned}$$

Кроме того, для удобства записи рекуррентных соотношений, связанных с числами $p(n)$, полагают, что $p(0) = 1$, $p(n) = 0$ в случае отрицательных целых n.

3.2.3. Как и задачу о наклейке марок на бандероль, задачу 3.2 можно свести к задаче о раскладке n неразличимых предметов по n различимым ящикам. Действительно, будем складывать в первый ящик единицы, то есть неразличимые предметы в любом количестве, во второй ящик будем складывать двойки, то есть неразличимые предметы, общее количество которых кратно двойке, и так далее. В этом случае любой способ раскладки ровно n неразличимых предметов по n таким ящикам дает нам некоторое разбиение заданного числа n и наоборот.

С формальной точки зрения это означает, что задачу 3.2 можно переформулировать следующим образом:

Задача 3.3. Найти количество всех решений в неотрицательных целых числах уравнения вида

$$y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + n \cdot y_n = n.$$

Такая задача, как мы уже понимаем, легко решается с помощью обыкновенных производящих функций. Комбинаторному действию, заключающемуся в укладке любого количества неразличимых предметов в первый ящик, отвечает производящая функция

$$\varphi_1(z) = 1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1-z}.$$

Комбинаторному действию, состоящему в укладке четного числа неразличимых предметов во второй ящик, соответствует производящая функция

$$\varphi_2(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots = \frac{1}{1-z^2}.$$

Наконец, комбинаторному действию, отвечающему раскладке n неразличимых предметов по n таким ящикам, соответствует произведение всех таких функций:

$$\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^n)}.$$

3.2.4. Построенное выше решение обладает, однако, одним существенным недостатком — в этом решении явным образом присутствует параметр n. Нам же хочется получить решение, не зависящее от n. Оказывается, это можно сделать, записывая решение как формально бесконечное произведение вида

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-z)}\frac{1}{(1-z^2)}\ldots\frac{1}{(1-z^n)}\ldots. \tag{11}$$

При этом для любого фиксированного n количество слагаемых с z^n будет, очевидно, конечным.

Решение задачи о разбиении заданного натурального числа n в виде бесконечного произведения (11) было получено впервые Леонардом Эйлером в сороковых годах восемнадцатого века.

3.3. С помощью обыкновенных производящих функций можно получать достаточно красивые результаты, связанные с разбиением числа n на слагаемые. В качестве характерного примера рассмотрим задачу о разбиении числа n в случае, когда любому числу позволяется входить в это разбиение не более одного раза.

3.3.1. Несложно понять, что производящая функция, описывающая количество таких разбиений, имеет следующий вид:

$$\varphi(z) = (1+z)(1+z^2)\dots(1+z^n)\dots$$

Известно, однако, что для любого натурального j

$$1 + z^j = \frac{(1-z^{2j})}{(1-z^j)}.$$

Поэтому функцию $\varphi(z)$ можно переписать так:

$$\varphi(z) = \frac{(1-z^2)}{(1-z)}\frac{(1-z^4)}{(1-z^2)}\frac{(1-z^6)}{(1-z^3)}\dots\frac{(1-z^{2n})}{(1-z^n)}\dots$$

3.3.2. В числителе полученного выше выражения для $\varphi(z)$ стоят сомножители с четными степенями z. В бесконечном произведении они постепенно сокращаются с аналогичными сомножителями, стоящими в знаменателях этих дробей. Функция $\varphi(z)$ после таких сокращений записывается в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-z)}\frac{1}{(1-z^3)}\frac{1}{(1-z^5)}\dots\frac{1}{(1-z^{2n-1})}\dots$$

Но такая производящая функция описывает количество разбиений n на слагаемые, каждое из которых является нечетным числом.

3.3.3. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.4. *Количество способов разбиения натурального числа n на слагаемые, при котором любое число входит в это разбиение не более одного раза, равно количеству разбиений n на нечетные слагаемые.*

Пример 3.5. В случае $n = 5$ имеется три разбиения, в которых любое число, меньшее или равное n, входит не более одного раза:

$$5 = (4+1) = (3+2) = (5).$$

Количество разбиений числа $n = 5$, содержащих только нечетные слагаемые, также равно трем:

$$5 = (1+1+1+1+1) = (3+1+1) = (5).$$

3.4. Заметим, что в задачах раскладки n неразличимых предметов по различимым ящикам (т.е. в задачах о *разложении* числа n на слагаемые) достаточно легко решался случай фиксированного числа k ящиков, и несколько сложнее — случай нефиксированного k.

Оказывается, в задачах раскладки n неразличимых предметов по неразличимым ящикам (т.е. в задачах о *разбиении* числа n на слагаемые) все обстоит ровно наоборот. Именно, мы в данном параграфе показали, что задачи о раскладке n неразличимых предметов по неразличимым ящикам в случае, когда количество k этих ящиков заранее не определено, решаются достаточно легко. Задачи же раскладки n неразличимых предметов по фиксированному числу k неразличимых ящиков оказываются более сложными. Технике решения таких задач посвящен следующий параграф.

4 Задачи раскладки n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам. Диаграммная техника

4.1. Напомним, что в первой главе за нами остался долг — мы не показали, как решать задачи о раскладке n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам. Основная задача данного параграфа — научиться, наконец, такие задачи решать.

4.1.1. Начнем мы со следующей задачи: предположим, что у нас имеется n неразличимых предметов и k неразличимых же ящиков, и мы хотим подсчитать количество раскладок этих предметов по ящикам при условии, что в каждом ящике находится хотя бы один предмет. Мы начинаем именно с такого способа раскладки потому, что эта задача эквивалентна чрезвычайно важной с практической точки зрения задаче о *разбиении* натурального числа n ровно на k положительных слагаемых.

Определение 4.1. Разбиением целого положительного числа n ровно на k слагаемых (или ровно на k частей) называется неупорядоченный набор, состоящий из фиксированного количества k целых положительных чисел x_i, $i = 1, \ldots, k$, сумма которых равна n.

Очевидно, что любое такое разбиение с формальной точки зрения представляет собой некоторое решение в целых положительных числах уравнения вида

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \tag{12}$$

при фиксированнных значениях n и k. Так как порядок слагаемых в правой части данного равенства роли не играет, то для определенности можно, например, считать, что числа x_i упорядочены по невозрастанию, то есть что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 1$.

Количество разбиений n ровно на k положительных слагаемых обозначается обычно через $p_k(n)$ по аналогии с количеством $p(n)$ *всех* разбиений натурального числа n на заранее не фиксированное количество положительных слагаемых. Очевидно, конечно же, что при этом

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(n) = p(n), \tag{13}$$

Приведем несколько примеров. Так как

$$5 = (4 + 1) = (3 + 2),$$

то количество $p_2(5)$ разбиений числа 5 ровно на два положительных слагаемых равно двум. Далее, так как

$$7 = (5 + 1 + 1) = (4 + 2 + 1) = (3 + 3 + 1) = (3 + 2 + 2),$$

то количество $p_3(7)$ разбиений числа 7 ровно на три положительных слагаемых равно четырем.

Несложно также понять, чему равно $p_k(n)$ для некоторых специальных случаев. Например, тривиальному случаю $k = 1$ отвечает единственное решение вида $x_1 = n$, поэтому $p_1(n) = 1$ для любого n. Ясно также, что $p_n(n) = 1$: разбиению любого числа n на n же частей соответствует единственное представление этого числа в виде суммы n единиц. Наконец, очевидно, что $p_k(n) = 0$ для любого $k > n$ — мы не можем разложить натуральное число на положительные слагаемые, количество которых строго больше этого числа n.

4.1.2. Перейдем теперь к еще одной, не менее важной задаче — задаче о раскладке n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в каждом ящике. На языке теории разбиений такая схема раскладки соответствует разбиению целого неотрицательного числа n на *не более чем* k слагаемых.

Определение 4.2. Разбиением целого неотрицательного числа n на не более чем k слагаемых называется неупорядоченный набор, состоящий из k *неотрицательных* чисел x_i, $i = 1, \ldots, k$, сумма которых равна n:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \qquad x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0.$$

Обозначим через $P_k(n)$ количество всех таких разбиений. Очевидно, что $P_1(n) = 1$. Кроме того, в данной задаче не исключен случай, когда в любом из k ящиков предметы отсутствуют (т.е. $n = 0$). Так как для любого k такой случай единственен, то число $P_k(0) = 1 \ \forall \ k \geqslant 0$.

Приведем несколько примеров описанных выше разложений. Так как

$$5 = (5) = (4 + 1) = (3 + 2),$$

то существует ровно три разбиения числа 5 на *не более чем два* слагаемых. Далее,

$$7 = (7) = (6 + 1) = (5 + 2) = (4 + 3) = (5 + 1 + 1) = (4 + 2 + 1) = (3 + 3 + 1) = (3 + 2 + 2),$$

поэтому $P_3(7) = 8$.

4.1.3. Числа $P_k(n)$ достаточно тесно связаны с числами $p_k(n)$ и $p(n)$. Так, для любого $k \geqslant n$ справедливо равенство

$$P_k(n) = p(n), \qquad k \geqslant n.$$

При $n = 0$ оно верно, так как по определению для любого $k \geqslant 0$ число $P_k(0) = 1 = p(0)$. Справедливость этого равенства при $n > 0$ очевидна — количество разбиений n на не более чем $k \geqslant n$ неотрицательных чисел совпадает с количеством разбиений ровно на n неотрицательных чисел, а оно, в свою очередь, совпадает с $p(n)$.

Далее, из определения чисел $P_k(n)$ и $p_k(n)$ следуют равенства

$$p_k(n) = P_k(n) - P_{k-1}(n) \qquad \text{и} \qquad P_k(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n), \tag{14}$$

связывающие эти числа при всех $n > 0$ и $k \geqslant 1$.

Наконец, числа $p_k(n)$ и $P_k(n)$ связаны следующим важным равенством:

$$p_k(n) = P_k(n - k) \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_k(n) = p_k(n + k). \tag{15}$$

Комбинаторное доказательство этого равенства достаточно элементарно. Действительно, предположим, что нам нужно разложить n неразличимых предметов по k неразличимым же ящикам так, чтобы в каждом ящике лежал хотя бы один предмет. Разместим вначале в каждый из k ящиков ровно по одному предмету. После этого оставшееся количество предметов, равное $n-k$, мы можем произвольным образом разложить по k ящикам, и сделать мы это можем $P_k(n - k)$ количеством способов.

Итак, нам, в принципе, все равно, какие из чисел взять за основу — $p_k(n)$ или $P_k(n)$. Имея какие-то соотношения для $p_k(n)$, мы легко из них получим соответствующие соотношения для чисел $P_k(n)$ и наоборот.

4.1.4. Давайте теперь получим какие-то рекуррентные соотношения на числа $p_k(n)$.

Утверждение 4.3. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{m} p_i(n-k), \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1; \qquad m = \min\{k, n-k\}; \tag{16}$$

$$p_1(n) = p_n(n) = 1; \qquad p_k(n) = 0 \quad \textit{для любого } k > n.$$

Доказательство. Для доказательства рекуррентного соотношения (16) мы можем, например, вместо x_i в уравнении

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \qquad x_i > 0,$$

ввести новые переменные $\widetilde{x}_i = x_i - 1$. Тогда это уравнение примет вид

$$n - k = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{x}_k, \qquad \widetilde{x}_i \geqslant 0. \tag{17}$$

Все множество решений такого уравнения можно разбить на блоки в зависимости от количества i ненулевых слагаемых в левой части уравнения (17). В первый блок мы поместим все решения, для которых в правой части (17) только одно слагаемое строго больше нуля:

$$n - k = \widetilde{x}_1, \qquad \widetilde{x}_1 > 0.$$

Количество элементов в таком блоке равно, очевидно, $p_1(n-k)$. Во второй блок мы поместим разбиения числа $n-k$ ровно на два положительных слагаемых:

$$n - k = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2, \qquad \widetilde{x}_i > 0.$$

Ясно, что количество таких разбиений равно $p_2(n-k)$. На последнем шаге в случае $k \leqslant (n-k)$ мы получаем уравнение вида

$$n - k = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{x}_k, \qquad \widetilde{x}_i > 0,$$

которое имеет $p_k(n-k)$ решений. В случае же $k > (n-k)$ мы должны будем остановиться на шаге, равном $(n-k)$:

$$n - k = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{x}_{n-k}, \qquad \widetilde{x}_i > 0.$$

На большее количество слагаемых $n-k$ мы в данном случае разбить уже не сможем. Суммируя теперь количество элементов в каждом блоке, мы и получим в итоге рекуррентное соотношение (16).

Заметим теперь, что доказать (16) мы можем и значительно проще, используя равенство (15). Действительно, переходя от уравнения (12) к уравнению (17), мы, по сути, еще раз передоказали формально доказанное нами ранее комбинаторно равенство (15). Мы также знаем (см.(14)), что при $k \leqslant (n-k)$ справедливо равенство

$$P_k(n-k) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n-k).$$

В случае же $k > (n-k)$ мы в последней сумме должны ограничиться $(n-k)$ слагаемыми. □

4.1.5. Докажем еще одно полезное рекуррентное соотношение для чисел $p_k(n)$.

Утверждение 4.4. *Числа $p_k(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида*

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k). \tag{18}$$

Доказательство. С формальной точки зрения формула (18) является простым следствием утверждения 4.3. Такое доказательство предлагается провести в упражнении **??** к данному параграфу. Здесь же мы докажем рекуррентное соотношение (18) непосредственно из комбинаторных соображений.

Разобъем множество всех разбиений числа n на два блока.Поместим в первый блок все разбиения, в которые хотя бы один раз входит единица, а во второй — разбиения, в которые единица не входит. Для всех разбиений из первого блока эту единицу всегда можно поставить на последнее, k-е место. На оставшихся $k-1$ позициях может стоять любое из $p_{k-1}(n-1)$ разбиений числа $(n-1)$ на $(k-1)$ частей. Ясно, что количество таких разбиений равно $p_{k-1}(n-1)$.

Любое разбиение из второго блока свободно от единиц — все слагаемые x_i в разложении (12) числа n на k частей строго больше единицы. Вычитая из каждого такого слагаемого единицу, мы получим какое-то разбиение числа $(n-k)$ на k частей. Верно и обратное — любое из $p_k(n-k)$ таких разбиений можно превратить в разбиение числа n, свободное от единиц. Следовательно, количество разбиений из второго блока совпадает с количеством всех разбиений числа $(n-k)$ на k частей, т.е. равно $p_k(n-k)$. □

4.1.6. Комбинаторные доказательства равенств вида (15) или (18) можно сделать значительно более наглядными с помощью так называемой *диаграммной техники.*

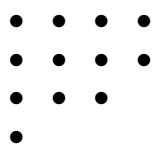
Определение 4.5. Диаграммой Ферре называется следующее графическое представление любого разбиения числа n:

- каждый член разбиения (любое слагаемое x_i) представляется в виде строки, состоящей из соответствующего количества точек;

- указанные строки располагаются в порядке невозрастания, выравненными по левому краю диаграммы.

Приведем несколько характерных примеров диаграмм Ферре:

$n = 12 = 4 + 4 + 3 + 1 :$



$n = 5 = 3 + 2 :$

Иногда удобно вместо точек рисовать квадраты. Такое графическое представление называется диаграммой Юнга.

4.1.7. Покажем теперь, как можно с помощью диаграмм Ферре несколько более наглядно доказать, к примеру, равенство (15), т.е. доказать, что количество $P_k(n)$ разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно количеству способов разбиения $n+k$ ровно на k слагаемых.

Рассмотрим для этого произвольную диаграмму Ферре, изображающую разбиение числа n на не более чем k слагаемых:

$$\text{пусть } n = 10,\ k = 4,\ n = 10 = 5 + 4 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \\ \circ & & & & \end{array} \right.$$

Как видно из примера, такая диаграмма состоит из $n = 10$ точек (символы $\bullet$), расположенных в не более чем $k = 4$ строках. Для наглядности в примере последняя, пустая строка заполнена символом $\circ$.

Теперь сделаем следующее: добавим к этой диаграмме столбец, состоящий ровно из k точек:

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \\ \circ & & & & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{llllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \circ & & & & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{llllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & & & & & \end{array}$$

В результате получаем диаграмму Ферре, состоящую ровно из $n + k$ точек и содержащую хотя бы один столбец длины k. Но такая диаграмма как раз и изображает разбиение числа $n + k$ ровно на k частей.

Обратно, удаляя из любой диаграммы Ферре, изображающей разбиение числа $k + n$ ровно на k частей, первый столбец, мы получаем диаграмму, соответствующую какому-то разбиению числа n на не более чем k частей.

Итак, с помощью диаграмм Ферре мы установили взаимно-однозначное соответствие между множеством разбиений числа n на не более чем k частей и множеством разбиений числа $n + k$ ровно на k частей, а следовательно, еще раз доказали равенство (15).

4.1.8. Описанная при доказательстве (15) техника, опирающаяся на работу с диаграммами Ферре, довольно часть используется в теории разбиений. Она позволяет сделать более наглядными комбинаторные рассуждения, а следовательно, и упростить решения многих задач из области теории разбиений. Ряд характерных примеров такого рода рассуждений предлагается проделать в упражнениях **??**–**??** к данному параграфу.

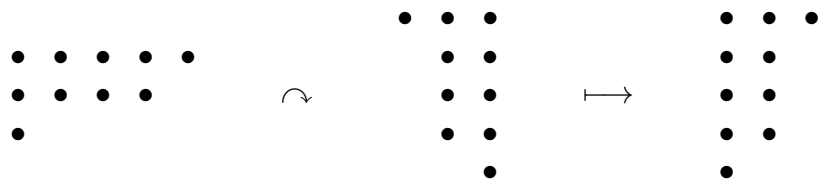
4.2. Перейдем теперь к построению производящих функций для чисел $p_n(k)$ и $P_n(k)$.

4.2.1. При построении таких функций весьма полезным оказывается понятие так называемой *двойственной диаграммы Ферре.* По определению, любую диаграмму Ферре мы читаем по строкам, понимая при этом, что любой строке отвечает некоторая часть разбиения заданного числа n. Однако ту же диаграмму мы можем читать и по столбцам, то есть мы можем трактовать уже любой столбец как некоторую часть разбиения. С формальной точки зрения это означает, что мы любому разбиению заданного числа n на k частей можем взаимно-однозначно сопоставить некоторое разбиение этого же числа n, описывающееся диаграммой Ферре, полученной из исходной поворотом на 90° по часовой стрелке и приведением к нормальному виду (или отражением этой диаграммы относительно вертикальной оси). Такая диаграмма Ферре и называется диаграммой, двойственной к исходной.

Пример 4.6. Пусть $n = 10 = 5+4+1$. Указанному разбиению отвечает диаграмма Ферре вида

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & & \end{array}$$

Повернем эту диаграмму Ферре на 90° и приведем полученную диаграмму к нормальному виду:



Полученная в результате этих операций двойственная диаграмма Ферре описывает уже некоторое другое разбиение этого же числа $n = 10$, а именно, разбиение вида $n = 10 = 3+2+2+2+1$.

4.2.2. Рассмотрим теперь диаграмму Ферре для числа n, состоящую из не более чем k строк. Двойственная к ней диаграмма описывает разбиение числа n на части, в котором любая часть не превосходит k.

Так, в примере 4.6 разбиению $n = 10$ вида $10 = 5 + 4 + 1$ на не более чем 3 части отвечает двойственное разбиение этого же числа вида $10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1$, любая часть которого не превосходит трех.

Тем самым, справедливо следующее

Утверждение 4.7. *Количество $P_k(n)$ разбиений n на не более чем k частей равно количеству разбиений n на части, любая из которых не превосходит k.*

Теперь заметим, что любое разбиение n на части, в котором любая часть не превосходит заданного числа k, можно трактовать как одно из решений в целых неотрицательных числах уравнения вида

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + k \cdot y_k = n, \qquad y_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Но количество всех решений такого рода уравнений мы умеем находить — оно описывается обыкновенной производящей функцией вида

$$F_k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) \ldots (1 + z^k + z^{2k} + \ldots) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^k)}.$$

Как следствие, мы доказали, что $F_k(z)$ является производящей функцией для количества $P_k(n)$ разбиений n на k неотрицательных слагаемых. Иными словами, эта функция описывает количество раскладок n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам при отсутствии каких-либо ограничений на количество предметов в любом ящике.

4.2.3. Перейдем теперь к диаграмме Ферре, содержащей ровно k строк, т.е. диаграмме, описывающей разбиение n ровно на k частей. Двойственная к ней диаграмма описывает разбиение n на части, в котором хотя бы одна часть гарантированно равна k, а все остальные части разбиения не превосходят k.

Так, в примере 4.6 разбиению $n = 10 = 5 + 4 + 1$ отвечает двойственное разбиение $n = 10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1$, содержащее одну часть, в точности равную $k = 3$. Остальные части это число $k = 3$ не превосходят.

Иными словами, с использованием понятия двойственной диаграммы Ферре мы доказали следующее

Утверждение 4.8. *Количество $p_k(n)$ разбиений числа n ровно на k слагаемых равно количеству разбиений n на части, не превосходящие k, в котором одна из частей обязательно равна k.*

Но любое разбиение n на части, не превосходящие k, содержащее хотя бы одно слагаемое, равное k, на формальном языке можно рассматривать как решение в целых числах уравнения вида

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + k \cdot y_k = n, \qquad y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0, \quad \ldots \quad y_{k-1} \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 1.$$

Количество решений такого рода уравнений описывается обыкновенной производящей функцией

$$f_k(z) = (1 + z + z^2 + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) \ldots (1 + z^{k-1} + z^{2k-2} + \ldots)(z^k + z^{2k} + \ldots) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad f_k(z) = \frac{z^k}{(1-z)(1-z^2)\ldots(1-z^k)}.$$

Тем самым, $f_k(z)$ является производящей функцией для количества $p_k(n)$ разбиений n на k положительных слагаемых, или, на другом языке, она является производящей функцией для количества раскладок n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждый ящик нам следует положить хотя бы один предмет.

4.3. В заключение данного параграфа вернемся к производящей функции $f(z)$ для количества $p(n)$ разбиений

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots} =: \frac{1}{Q(z)}$$

и вслед за Л.Эйлером рассмотрим поподробнее стоящую в знаменателе функцию

$$Q(z) = (1-z)(1-z^2)(1-z^3)\ldots$$

После перемножения первых 22 скобок Эйлер получил следующий результат:

$$Q(z) = (1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots)(1 - z^{23})(1 - z^{24})\ldots$$

Видно, что при умножении первой скобки на $(1 - z^{23})(1 - z^{24})\ldots$ будут меняться лишь коэффициенты при степенях z, больших, чем 22. Коэффициенты же при степенях z, меньших или равных 22, меняться уже не будут — произойдет, как говорят, стабилизация коэффициентов в этом произведении. Эйлер заметил, что после стабилизации коэффициенты при этих степенях оказываются равными 0, 1 или -1, причем коэффициенты 1 и -1 попарно чередуются: после двух минус единиц идут две единицы и так далее. После долгих экспериментов Эйлер установил следующее правило чередования этих коэффициентов:

$$Q(z) = 1 + \sum_{d=1}^{+\infty} (-1)^d \big(z^{\frac{3d^2-d}{2}} + z^{\frac{3d^2+d}{2}} \big). \tag{19}$$

Числа

$$\omega(d) := \frac{3d^2 - d}{2} = \sum_{i=0}^{d-1} (3i+1) \qquad \text{и} \qquad \omega(-d) = \frac{3d^2 + d}{2}, \qquad d = 1, 2, \ldots$$

в этой формуле носят название *пентагональных чисел,* так как они описывают вложенные друг в друга пятиугольники, построенные на 1, $1 + 4 = 5$, $1 + 4 + 7 = 12$, $1 + 4 + 7 + 10 = 22$ и так далее точках.

Комбинаторно формула (19) была доказана лишь в 1881 году американским математиком Фабианом Франклином. Мы приведем здесь это доказательство — отчасти ввиду его красоты, а отчасти для того, чтобы еще раз продемонстрировать полезность использования диаграмм Ферре при доказательстве утверждений, связанных с разбиениями чисел.

4.3.1. Прежде всего заметим, что $Q(z)$ очень похожа на функцию

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\dots,$$

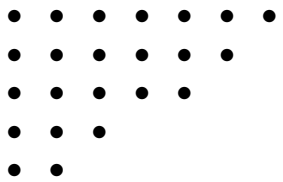
описывающую разбиение числа n на *различные* слагаемые (части). Однако, в отличие от этой функции, в $Q(z)$ любое слагаемое, получающееся после перемножения скобок, может входить как со знаком плюс, так и со знаком минус. Давайте поймем, когда какой знак получается.

Очевидно, что знак плюс получается в случае, когда нетривиальных (то есть отличных от единицы) сомножителей в произведении четное число. В случае нечетного числа таких сомножителей мы получаем знак минус. С точки зрения разбиения числа n на части это можно трактовать следующим образом. Если n разбивается на четное число частей (например, $n = 12 = 5+4+2+1$), то коэффициент при z^n имеет знак плюс (для приведенного выше примера имеем $(-z^5)(-z^4)(-z^2)(-z^1) = z^{12}$). Если же n разбивается на нечетное число частей, то коэффициент при z^n имеет знак минус (так, для разбиения $n = 12 = 6+4+2$ получаем $(-z)^6(-z)^4(-z)^2 = -z^{12}$).

Для подсчета общего количества таких разбиений мы складываем коэффициенты при одинаковых степенях z. Тогда равенство нулю коэффициента при z^n в функции $Q(z)$ означает, что количество разбиений заданного числа n на четное и нечетное число частей совпадает. Иными словами, теорема Эйлера (19) утверждает, что почти всегда (то есть почти для любых n) количество разбиений n на четное число частей совпадает с количеством разбиений n на нечетное число частей. При этом, однако, существуют исключительные числа n, а именно, пентагональные числа $n = \omega(d)$ и $n = \omega(-d)$, для которых количество четных разбиений на единицу отличается от количества нечетных разбиений.

Все, что нам осталось — это строго доказать все эти утверждения.

4.3.2. Рассмотрим для этого диаграмму Ферре любого разбиения числа n на различное число частей:



Заметим, что любая такая диаграмма состоит из некоторого количества поставленных друг на друга трапеций (на рисунке имеем две таких трапеции). Обозначим через l длину самой нижней строчки диаграммы Ферре (то есть l есть наименьшая часть разбиения числа n), а через d — длину ее "верхней диагонали", то есть количество строк в самой верхней трапеции диаграммы Ферре. Для диаграммы Ферре, представленной на рисунке, $l = 2$, $d = 3$.

Разобьем теперь все множество таких диаграмм Ферре на блоки в зависимости от количества входящих в них трапеций, а также в зависимости от конкретных значений параметров l и d. В первый блок включим все диаграммы Ферре, состоящие из двух и более трапеций, у которых $d \geqslant l$, а также диаграммы Ферре, состоящие из одной трапеции, у которой $d > l$. К этому блоку принадлежит диаграмма Ферре, отвечающая приведенному выше примеру разбиения числа

$n = 23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$ на $k = 5$ различных частей, равных 7, 6, 5, 3 и 2. Еще один пример — это диаграмма Ферре

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

отвечающая разбиению числа $n = 13$ вида $n = 13 = 5 + 4 + 3 + 2$.

Во второй блок включим диаграммы, состоящие из не менее чем двух трапеций, у которых $d < l$, а также диаграммы, состоящие из одной трапеции, у которых $d < l - 1$.

Наконец, в третий блок включим диаграммы Ферре для двух оставшихся типов разбиений, а именно, диаграммы, состоящие из одной трапеции, у которых $d = l$ или $d = l - 1$.

Заметим теперь, что любую диаграмму, принадлежащую к первому блоку, можно перевести в диаграмму, принадлежащую ко второму блоку, следующим преобразованием. Возьмем диаграмму Ферре из первого блока, отрежем от этой диаграммы нижнюю строку и "приклеим" ее к верхней трапеции:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \end{array}$$

Еще один пример:

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

Полученные в результате такого преобразования диаграммы Ферре принадлежат, очевидно, второму блоку. Обратно, беря любую диаграмму Ферре из второго блока, отрезая от нее верхнюю диагональ и приклеивая ее под нижней строкой, мы получаем диаграмму Ферре, принадлежащую к первому блоку. Тем самым мы показали, что количество разбиений заданного числа n, принадлежащих к первому блоку, в точности совпадает с количеством разбиений n, принадлежащих ко второму блоку.

Заметим теперь, что в результате любого из таких преобразований четность разбиения числа n меняется на противоположную. Так, в первом примере разбиение $n = 23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$, состоящее из нечетного числа различных слагаемых, превращается в разбиение $n = 23 = 8 + 7 + 5 + 3$, содержащее четное число различных слагаемых. Как следствие, отвечающие этим парам разбиений слагаемые в $Q(z)$ взаимно сокращаются.

Перейдем теперь к диаграммам Ферре из третьего блока, то есть к диаграммам вида

$$\begin{array}{ccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \end{array}$$

Эти диаграммы характеризуются тем, что они не допускают описанных выше преобразований. От них нельзя отрезать нижнюю строку и приклеить ее справа от трапеции. Кроме того, нельзя

отрезать от такой диаграммы верхнюю диагональ и приклеить ее под нижней строкой — мы либо не получим диаграмму Ферре, либо получим диаграмму Ферре разбиения, в котором два слагаемых совпадают, а это нас также не устраивает. Иными словами, эти диаграммы не допускают парных им диаграмм, описывающих разбиение заданного числа с противоположной четностью.

Подсчитаем количество точек в этих диаграммах. В диаграммах, состоящих из одной трапеции, у которых $d = l$, количество точек равно

$$l + (l+1) + \ldots + (l + (d-1)) = l + (l+1) + \ldots + (2l-1) = d + (d+1) + \ldots + (2d-1) = d \cdot \frac{3d-1}{2}.$$

В диаграммах, состоящих из одной трапеции, для которых выполнено равенство $d = l - 1$, имеем

$$l + (l+1) + \ldots + (l + (d-1)) = l + (l+1) + \ldots + (2l-2) = (d+1) + (d+2) + \ldots + 2d = d \cdot \frac{3d+1}{2}.$$

Следовательно, только числа $n(d) = d \cdot (3d \pm 1)/2$ допускают разбиения указанного вида

$$n(d) = d + (d+1) + \ldots + (2d-1) \qquad \text{или} \qquad n(d) = (d+1) + (d+2) + \ldots + 2d,$$

причем для любого такого $n(d)$ соответствующая этому разбиению диаграмма Ферре единственна.

Как следствие, в случае $n = n(d)$ и $d = 2m$ (т.е. четного d) количество разбиений n на четное число частей будет на единицу больше количества разбиений этого же числа на нечетное число частей. Поэтому соответствующий этому $n(d)$ коэффициент при $z^{n(d)}$ в разложении $Q(z)$ по степеням z будет равен плюс единице. В случае $n = n(d)$ и $d = 2m+1$ (т.е. нечетного d) количество разбиений n на нечетное число частей будет на единицу больше количества разбиений на четное число частей. Это приводит к тому, что коэффициент при $z^{n(d)}$ в разложении $Q(z)$ будет равен минус единице. Наконец, в случае $n \neq n(d)$ количество разбиений n на четное число частей будет совпадать с количеством разбиений n на нечетное число частей. Как следствие, для всех таких n соответствующие им степени z^n в функции $Q(z)$ сокращаются. Теорема доказана.

4.3.3. Формула (19) позволяет получить довольно удобное рекуррентное соотношение для чисел $p(n)$. Действительно, производящая функция $f(z)$ для этих чисел равна

$$f(z) = \frac{1}{Q(z)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(z) \cdot Q(z) = 1,$$

$$f(z) = p(0) + p(1)z + p(2)z^2 + \ldots + p(n)z^n + \ldots, \qquad Q(z) = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + \ldots$$

Перемножая теперь эти ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем следующее рекуррентное соотношение для чисел $p(n)$:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - \ldots$$

Пользуясь им, можно достаточно быстро вычислять значения $p(n)$ для не слишком больших значений n.

5 Композиция экспоненциальных производящих функций

5.1. Вернемся к операции композиции производящих функций. Во втором параграфе данной главы мы ввели крайне важную и полезную операцию композиции $h(z) = g(f(z))$ обыкновенных производящих функций.

5.1.1. Именно, мы взяли более-менее произвольную обыкновенную производящую функцию

$$f(z) = 0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

(единственное требование к ней состояло в том, чтобы ее коэффициент $a_0 = 0$), а также очень специальную функцию

$$g(z) = 1 + 1 \cdot z + 1 \cdot z^2 + \ldots + 1 \cdot z^n + \ldots = \frac{1}{1-z},$$

все коэффициенты которой равны единице, а затем поставили в функции $g(z)$ вместо z обыкновенную производящую функцию $f(z)$. В результате мы получили функцию вида

$$g(f(z)) = 1 + 1 \cdot f(z) + 1 \cdot f^2(z) + \ldots + 1 \cdot f^k(z) + \ldots = \frac{1}{1-f(z)}.$$

Подставляя теперь вместо $f(z)$ соответствующий ей формальный степенной ряд, возводя этот ряд в степени k, $k \geqslant 1$, и собирая коэффициенты при z^n, мы получили обыкновенную производящую функцию

$$h(z) = c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \ldots + c_n \cdot z^n + \ldots,$$

коэффициенты c_n которой имеют следующий комбинаторный смысл: это есть количество способов разложить n неразличимых предметов по заранее не фиксированному количеству k различимых ящиков, а затем над i предметами, попавшими в конкретный ящик, совершить a_i количеством способов комбинаторные действия, описывающиеся функцией $f(z)$.

Задача данного параграфа — научиться совершать похожие комбинаторные действия, но уже над различимыми предметами. Для этого, как мы уже знаем, нам вместо обыкновенных нужно будет, по всей видимости, работать с экспоненциальными производящими функциями. Действуя по аналогии, нам нужно будет взять экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1 \frac{z^1}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

а также экспоненциальную производящую функцию

$$G(z) = 1 + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots + 1 \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots = \exp(z),$$

все коэффициенты которой равны единице, подставить вместо z в $G(z)$ экспоненциальную функцию $F(z)$, собрать коэффициенты при $z^n/n!$ и в полученной экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = G(F(z)) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{F^2(z)}{2!} + \ldots + \frac{F^k(z)}{k!} + \ldots = c_0 + c_1 \frac{z^1}{1!} + c_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

объяснить комбинаторный смысл коэффициентов c_n.

5.1.2. Давайте приступим к осуществлению намеченного нами плана. Возьмем для этого произвольную экспоненциальную функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой описывают количество способов совершить какое-то комбинаторное действие над n-элементным множеством X. Как мы знаем, произведению k экземпляров этой функции $F(z)$ отвечает экспоненциальная функция

$$\widetilde{H}_k(z) = [F(z)]^k,$$

коэффициенты при $z^n/n!$ которой описывают нам количество способов совершить следующие комбинаторные действия: взять n различимых предметов, разложить их по *фиксированному* числу k *различимых* ящиков, а затем над i предметами, попавшими в конкретный ящик, совершить комбинаторное действие, описывающееся функцией $F(z)$, a_i количеством способов.

Предположим теперь, что мы хотим раскладывать предметы по заранее не фиксированному количеству ящиков. Иными словами, мы хотим раскладывать предметы или по одному, или по двум, или по трем и так далее количеству ящиков. Как мы с вами знаем, слову "или" в комбинаторике отвечает операция сложения производящих функций, отражающая, в свою очередь, комбинаторное правило сложения. Суммируя тогда функции $\widetilde{H}_k(z)$ по k, мы получим производящую функцию

$$\widetilde{H}(z) = 1 + F(z) + F^2(z) + \ldots + F^k(z) + \ldots = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1\frac{z^1}{1!} + \widetilde{c}_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + \widetilde{c}_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты $\widetilde{c}_n$ которой описывают количество способов совершить такие комбинаторные действия: взять n различимых предметов, разложить их по *заранее не фиксированному* числу k *различимых* ящиков, а затем совершить над i предметами, попавшими в конкретный ящик, комбинаторное действие, описывающееся функцией $F(z)$, a_i количеством способов.

При таком переходе, однако, мы сразу же должны наложить дополнительное ограничение на функцию $F(z)$ — как и в аналогичном случае обыкновенной производящей функции $f(z)$, коэффициент a_0 у функции $F(z)$ обязан равняться нулю. Действительно, с формальной точки зрения неравенство $a_0 \neq 0$ означает, что для любого k функция

$$F^k(z) = \left[a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots\right]^k$$

будет давать вклад в коэффициент при $z^n/n!$ для любого значения параметра n. Но слагаемых вида $F^k(z)$ бесконечно много, поэтому и коэффициенты при $z^n/n!$ будут бесконечно большими для любого значения параметра n. С комбинаторной же точки зрения неравенство $a_0 \neq 0$ означает, что мы можем совершать какие-то нетривиальные комбинаторные действия и над ящиками, в которые у нас не попал ни один предмет. Но таких ящиков к любой раскладке n различимых предметов мы можем добавить сколько угодно. Поэтому в случае $a_0 \neq 0$ мы получаем бесконечное количество способов разложить n предметов по ящикам, а это нас не устраивает. Итак, для корректного перехода от фиксированного количества ящиков к произвольному мы должны полагать коэффициент $a_0 = 0$.

5.1.3. Заметим теперь, что мы изначально хотели получить не функцию $\widetilde{H}(z)$, а функцию

$$H(z) = G(F(z)) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{F^2(z)}{2!} + \ldots + \frac{F^k(z)}{k!} + \ldots = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

то есть функцию, у которой вместо слагаемых вида $F^k(z)$ присутствуют слагаемые вида $F^k(z)/k!$. Для того, чтобы понять разницу в этих двух функциях, вернемся на шаг назад и рассмотрим раскладку n предметов по *фиксированному* количеству k ящиков. Обозначим через $H_k(z)$ экспоненциальную производящую функцию, коэффициенты при $z^n/n!$ которой описывают количество способов разложить n различимых предметов по неразличимым ящикам, а затем совершить над i предметами, попавшими в конкретный ящик, комбинаторные действия, описывающиеся функцией $F(z)$, a_i количеством способов. Утверждается, что $H_k(z)$ связана с функцией $F(z)$ равенством

$$H_k(z) \cdot k! = F^k(z).$$

Действительно, любую совокупность из k неразличимых ящиков мы можем $k!$ способами разметить, превратив их в k помеченных ящиков. Для этого нам нужно рассмотреть наряду с k неразличимыми предметами множество из k различимых пометок. Выбирая из этого множества k способами первую пометку и наклеивая ее на один из k неразличимых ящиков, мы получим различимый ящик. Выбирая вторую пометку из оставшегося $(k-1)$-элементного множества пометок и наклеивая ее на еще один неразличимый ящик, мы получим второй различимый ящик. Продолжая далее, мы в конце концов получим k различимых ящиков, и получаем мы их, таким образом, $k!$ способами. Но тогда, согласно комбинаторному правилу произведения, производящая функция вида $H_k(z) \cdot k!$ даст нам количество способов разложить n различимых предметов уже по k различимым ящикам, а это количество способов и описывается функцией $F^k(z)$.

Теперь становится понятным комбинаторный смысл экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = 1 + H_1(z) + H_2(z) + \ldots + H_k(z) + \ldots$$

Именно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 5.1 (Экспоненциальная формула)**.** *Пусть a_n есть количество способов совершить какое-то комбинаторное действие над элементами n-элементного множества X, причем количество a_0 способов совершить это действие над пустым множеством равно нулю. Пусть c_n есть количество способов разбить n-множество X на* заранее не фиксированное *число k* непустых неразличимых *блоков, а затем совершить над элементами каждого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами. Тогда соответствующая этим c_n экспоненциальная производящая функция*

$$H(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

связана с экспоненциальной производящей функцией

$$F(z) = a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

следующим формальным соотношением:

$$H(z) = 1 + \frac{F(z)}{1!} + \frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + \frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots =: \exp(F(z)). \tag{20}$$

Соотношение (20) носит название *экспоненциальной формулы.*

5.1.4. В качестве важного примера рассмотрим задачу о раскладке различимых предметов по ящикам. Напомним, что в такого рода задачах мы вводили экспоненциальную производящую функцию

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты a_n которой имели следующий комбинаторный смысл: $a_n = 1$, если мы можем положить n различимых предметов в ящик, и $a_n = 0$, если нам это делать запрещено. Для такой производящей функции $F(z)$ экспоненциальная формула (20) решает, очевидно, следующую задачу: подсчитать количество всевозможных способов раскладки n различимых предметов по *заранее не фиксированному* числу k *неразличимых* ящиков. При этом мы обязательно должны потребовать, чтобы коэффициент a_0 при z^0 у функции $F(z)$ всегда был равен нулю. С комбинаторной точки зрения это означает, что в любом из k ящиков у нас должен находиться хотя бы один предмет.

Важным частным случаем данной задачи является задача о раскладке n различимых предметов по ящикам в случае, когда в каждый ящик мы можем складывать любое количество предметов, отличных от нуля. В этом случае все коэффициенты a_n, $n > 0$, равны единице, а количество способов раскладки описывает производящая функция вида

$$B(z) := \exp(\exp(z) - 1) = B_0 + B_1 z + B_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + B_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Коэффициенты B_n при $z^n/n!$ у этой функции есть не что иное, как числа Белла, описывающие количество способов разбиения n-элементного множества на непустые неупорядоченные блоки.

5.1.5. Напомним, что в первой главе из элементарных комбинаторных соображений нами было получено рекуррентное соотношение для вычисления чисел Белла B_n:

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i. \tag{21}$$

Оказывается, что с помощью экспоненциальной формулы (20) мы можем достаточно просто получить подобного рода формулы и для произвольной функции $F(z)$.

Продифференцируем для этого равенство $H(z) = \exp(F(z))$ по z:

$$H'(z) = \exp(F(z)) \cdot F'(z) = H(z) \cdot F'(z) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$c_1 + c_2\frac{z}{1!} + \ldots + c_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots = \Big(c_0 + c_1\frac{z}{1!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big)\Big(a_1 + a_2\frac{z}{1!}z + \ldots + a_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big).$$

Перемножая стоящие справа производящие функции, получаем рекуррентные соотношения для нахождения коэффициентов c_n по числам a_n:

$$c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_{i+1}c_{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c_i a_{n+1-i}. \tag{22}$$

Подставляя, в частности, в эту формулу значения $a_n = 1\ \forall\ n > 0$, мы из (22) получаем рекуррентное соотношение (21).

В дальнейшем нам понадобятся и обратные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять коэффициенты a_n производящей функции $F(z)$ по известным коэффициентам c_n. Для

получения таких соотношений достаточно выразить из формулы (22) коэффициенты a_{n+1}. В результате получаются равенства вида

$$a_{n+1} = \frac{1}{c_0}\left[c_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}c_i a_{n+1-i}\right]. \tag{23}$$

5.1.6. В качестве важного примера использования полученной выше формулы (23) подсчитаем количество $g_n^{(c)}$ всех односвязных графов, построенных на n вершинах.

Любой простой граф G представляет собой объединение некоторого числа k своих связных компонент. Поэтому для получения всех простых графов на n вершинах нам нужно совершить следующие комбинаторные действия: разбить n-множество вершин на заранее не фиксированное число k непустых неупорядоченных блоков и построить на любом из таких блоков размером i_m связной простой граф $g_{i_m}^{(c)}$ количеством способов. Иными словами, производящая функция

$$G(z) = 1 + 1\cdot\frac{z^1}{1!} + 2\cdot\frac{z^2}{2!} + 8\cdot\frac{z^3}{3!} + \ldots + 2^{\binom{n}{2}}\cdot\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

для количества g_n всех простых графов и производящая функция

$$G^{(c)}(z) = 0 + 1\cdot\frac{z^1}{1!} + 1\cdot\frac{z^2}{2!} + 4\cdot\frac{z^3}{3!} + \ldots + g_n^{(c)}\cdot\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

для количества $g_n^{(c)}$ всех связных простых графов, согласно комбинаторному смыслу формулы (20), связаны между собой следующим равенством:

$$G(z) = \exp(G^{(c)}(z)).$$

Теперь, зная количество $g_n = 2^{\binom{n}{2}}$ всех простых графов на n вершинах, мы можем записать следующее рекуррентное соотношение для подсчета количества $g_n^{(c)}$ всех связных графов:

$$g_{n+1}^{(c)} = g_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}g_i\, g_{n+1-i}^{(c)} = 2^{\binom{n+1}{2}} - \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}2^{\binom{i}{2}}\, g_{n+1-i}^{(c)}\,.$$

5.2. Экспоненциальную формулу $H(z) = G(F(z))$, в которой функция $G(z) = \exp(z)$, достаточно легко обобщить на случай произвольной функции

$$G(z) = b_0 + b_1\frac{z^1}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

5.2.1. Именно, предположим, что мы не просто хотим разбить n-множество U на заранее не определенное число k блоков, а еще и совершить над самими этими блоками какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. При фиксированном k мы бы получили, что количество c_n способов совершить все эти операции определялось бы коэффициентом при $z^n/n!$ в произведении вида $b_k[F(z)]^k/k!$. В случае же, когда k заранее не фиксировано, количество c_n способов совершить эти действия определяется как коэффициент при $z^n/n!$ в разложении функции

$$b_0 + b_1\frac{F(z)}{1!} + b_2\frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots =: G(F(z)) \tag{24}$$

по степеням z.

Таким образом, мы можем сформулировать следующее

Определение 5.2. Композицией $H(z) = G(F(z))$ пары экспоненциальных производящий функций $F(z)$ и $G(z)$ называется экспоненциальная производящая функция

$$H(z) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

коэффициенты c_n которой определяются как коэффициенты при $z^n/n!$ в разложении (24) по степеням z и имеют следующий комбинаторный смысл: c_n есть количество способов разбить n-элементное множество на *заранее не определенное* число k *непустых неразличимых* блоков, совершить над элементами каждого блока размером i_m первое комбинаторное действие a_{i_m} числом способов, а затем совершить над самими этими блоками второе комбинаторное действие b_k способами.

5.2.2. При выводе экспоненциальной формулы (20) мы предполагали, что получающиеся в процессе разбиения блоки являются неразличимыми. Достаточно очевидно, как решать аналогичную задачу в случае, когда блоки являются различимыми — в данном случае мы вместо функции $G(z) = \exp(z)$ должны рассматривать функцию вида $G(z) = 1/(1-z)$. Действительно, согласно комбинаторному смыслу сложения и умножения экспоненциальных производящих функций, формула вида

$$1 + F(z) + F^2(z) + \ldots + F^k(z) + \ldots = \frac{1}{1-F(z)}, \qquad \text{где} \qquad F(z) = a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

описывает нам следующие комбинаторные действия: разбить n-элементное множество на *заранее не фиксированное* число k *непустых различимых* блоков, а затем совершить над элементами каждого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами.

Эта же самая формула допускает, однако, и несколько иную комбинаторную интерпретацию. Действительно, вернемся к общей композиционной формуле (24) и положим в ней коэффициенты $b_k = k!$. С комбинаторной точки зрения это можно трактовать следующим образом: разбить n-элементное множество на *заранее не фиксированное* число k *непустых неразличимых* блоков, совершить над элементами любого такого блока размером i_m комбинаторное действие a_{i_m} способами, а затем *линейно упорядочить* полученные блоки.

На практике довольно часто встречается также случай, когда коэффициенты $b_k = (k-1)!$ при всех $k > 0$, $b_0 = 1$. С комбинаторной точки зрения такой выбор коэффициентов b_k означает, что мы *циклически* упорядочиваем блоки, получающиеся после разбиения n-множества U. Соответствующая этому случаю производящая функция $H(z)$ может быть записана в таком виде:

$$H(z) = 1 + F(z) + \frac{F^2(z)}{2} + \ldots + \frac{F^n(z)}{n} + \ldots = 1 + \ln\frac{1}{1-F(z)}.$$

Здесь через $\ln(1/(1-z))$ по аналогии с математическим анализом обозначен формальный степенной ряд вида

$$z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots =: \ln\frac{1}{1-z}.$$

5.2.3. Формула (24) позволяет нам записать решения целого класса комбинаторных задач, связанных с разбиением множества различимых предметов на заранее не определенное количество блоков, в довольно компактном и красивом виде. Нам бы хотелось, однако, наряду с такого рода красивыми формулами иметь и удобные рекуррентные соотношения, позволяющие нам

быстро сосчитать по заданным коэффициентам a_n и b_k производящих функций $F(z)$ и $G(z)$ соответствующие коэффициенты c_n при $z^n/n!$ формального степенного ряда $H(z)$. Решению этой задачи, а также поиску явных выражений для коэффициентов c_n, посвящен следующий параграф.

6 Формула Фаа ди Бруно. Полиномы Бэлла

6.1. Вернемся к композиционной формуле

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1\frac{z^1}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$F(z) = a_0 + a_1\frac{z^1}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots, \qquad G(z) = b_0 + b_1\frac{z^1}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots,$$

описывающей количество способов разбить n-элементное множество U на заранее не фиксированное количество k непустых неразличимых блоков, совершить внутри каждого блока размером i_m первое комбинаторное действие a_{i_m} числом способов, а затем над самими блоками совершить второе комбинаторное действие b_k числом способов. Наша первая задача состоит в получении явных формул для коэффициентов c_n экспоненциальной производящей функции $H(z)$.

6.1.1. Начнем мы, как всегда, с нескольких простых примеров.

Пример 6.1. Предположим, что в помещении находится четное число $n = 2k$ человек. Мы хотим разбить этих людей на пары, совершить над каждой из этих пар какое-то комбинаторное действие a_2 способами, а затем совершить над всеми k парами какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. В этом случае

$$F(z) = a_2\frac{z^2}{2!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

и поэтому

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots = b_0 + b_1 a_2\frac{z^2}{2!} + b_2\left(a_2\frac{z^2}{2!}\right)^2\frac{1}{2!} + \ldots + b_k\left(a_2\frac{z^2}{2!}\right)^k\frac{1}{k!} + \ldots$$

Таким образом, для данного частного случая коэффициенты c_n рассчитываются по формулам

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k+1, \\ n!\,\dfrac{b_k}{k!}\left(\dfrac{a_2}{2!}\right)^k, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 6.2. Теперь предположим, что количество людей в помещении кратно пяти, т.е. $n = 5k$, и мы совершаем аналогичные комбинаторные действия над пятерками людей. Именно, мы разбиваем n-множество на пятерки, совершаем над любой из этой пятерок комбинаторные действия a_5 способами, а затем совершаем над самими этими пятерками какое-то другое комбинаторное действие b_k способами. В этом случае

$$F(z) = a_5\frac{z^5}{5!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k\frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots = b_0 + b_1 a_5 \frac{z^5}{5!} + b_2 \Big(a_5 \frac{z^5}{5!}\Big)^2 \frac{1}{2!} + \ldots + b_k \Big(a_5 \frac{z^5}{5!}\Big)^k \frac{1}{k!} + \ldots,$$

так что

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 5k, \\ n!\,\dfrac{b_k}{k!}\Big(\dfrac{a_5}{5!}\Big)^k, & \text{если } n = 5k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 6.3. Наконец, предположим, что нам разрешено разбивать n-элементное множество U как на пятерки, так и на двойки. При таком условии

$$F(z) = a_2 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^5}{5!}, \qquad G(z) = b_0 + b_1 z + b_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + b_k \frac{z^k}{k!} + \ldots,$$

и наша задача — определить явное выражение для коэффициентов c_n в экспоненциальной производящей функции

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= b_0 + b_1 \Big(a_2 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^5}{5!}\Big) + b_2 \Big(a_2 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^5}{5!}\Big)^2 \frac{1}{2!} + \ldots + b_k \Big(a_2 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^5}{5!}\Big)^k \frac{1}{k!} + \ldots$$

Так как

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{\substack{i_1+i_2=k \\ i_1, i_2 \geqslant 0}} \frac{k!}{i_1! i_2!} x^{i_1} y^{i_2},$$

то

$$b_k \Big(a_2 \frac{z^2}{2!} + a_5 \frac{z^5}{5!}\Big)^k \frac{1}{k!} = b_k \sum_{\substack{k_2+k_5=k \\ k_2, k_5 \geqslant 0}} \frac{1}{k_2! k_5!} a_2^{k_2} a_5^{k_5} \frac{1}{(2!)^{k_2}} \frac{1}{(5!)^{k_5}} z^{2 \cdot k_2 + 5 \cdot k_5}.$$

Нам же нужно во всех выражениях такого типа (то есть для любых $k = 0, 1, 2, \ldots$) собрать слагаемые при $z^n/n!$. Иными словами, нас интересуют все такие k_2 и k_5, которые обеспечивают нам равенство $2k_2 + 5k_5 = n$. Учитывая эти соображения, мы для c_n получаем соотношение вида

$$c_n = \sum_{\substack{2 \cdot k_2 + 5 \cdot k_5 = n \\ k_2, k_5 \geqslant 0}} \frac{n!}{k_2! k_5!} b_{k_2+k_5} \Big(\frac{a_2}{2!}\Big)^{k_2} \Big(\frac{a_5}{5!}\Big)^{k_5}.$$

Еще раз подчеркнем, что суммирование в этой формуле происходит по всем возможным решениям уравнения

$$2 \cdot k_2 + 5 \cdot k_5 = n, \qquad k_2, k_5 \geqslant 0.$$

Количество таких решений, как мы знаем, можно найти с помощью производящей функции

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^5)}.$$

6.1.2. Теперь более-менее понятно, как обобщить наши рассуждения на общий случай функции

$$F(z) = 0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Аналогичные рассуждения показывают, что в общем случае коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = \sum_{\substack{1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n \\ k_i \geqslant 0}} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} b_{k_1 + \ldots + k_n} \Big(\frac{a_1}{1!}\Big)^{k_1} \ldots \Big(\frac{a_n}{n!}\Big)^{k_n}. \tag{25}$$

Суммирование в (25) ведется по всем неотрицательным целым решениям уравнения

$$1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n, \qquad k_i \geqslant 0, \tag{26}$$

количество которых, как известно, равно $p(n)$. Заметим, однако, что в формуле (25) нам нужно не просто найти число всевозможных решений, но и предъявить все эти решения.

6.1.3. Формула (25) для коэффициентов c_n впервые была получена французским математиком Арбогастом в 1800 году и переоткрыта в 1855 году итальянским математиком, изобретателем и священником Франческо Фаа ди Бруно. С тех пор она носит название формулы Фаа ди Бруно.

Заметим, что и Арбогаст, и Фаа ди Бруно получили формулу (25), пытаясь получить выражение для n-й производной композиции двух аналитических функций. Первые несколько таких производных сосчитать легко:

$$\sqsupset \;\; H(z) = G(F(z)) \qquad \Longrightarrow \qquad H'(z) = G'_F \cdot F'_z,$$

$$H''(z) = G''_{FF} \cdot (F'_z)^2 + G'_F \cdot F''_{zz},$$

$$H'''(z) = G'''_{FFF} \cdot (F'_z)^3 + 3 \cdot G''_{FF} \cdot F'_z \cdot F''_{zz} + G'_F \cdot F'''_{zzz}.$$

Возникает вопрос — существует ли общая формула для этих производных, и какое отношение имеет к ней композиционная формула? На самом же деле, конечно же, имеет, и самое прямое. Именно, любая аналитическая в точке $z = 0$ функция раскладывается в окрестности этой точки в ряд Тейлора:

$$F(z) = F(0) + F'(0)\frac{z^1}{1!} + F''(0)\frac{z^2}{2!} + \ldots + F^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} + \ldots =: a_0 + a_1\frac{z}{1!} + a_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$G(z) = G(0) + G'(0)\frac{z^1}{1!} + G''(0)\frac{z^2}{2!} + \ldots + G^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} + \ldots =: b_0 + b_1\frac{z}{1!} + b_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Поэтому

$$H(z) = G(F(z)) = c_0 + c_1\frac{z}{1!} + c_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

где коэффициенты $c_n = H^{(n)}(0)$ как раз и вычисляются по формулам (25).

6.2. С практической точки зрения полученные нами выше явные аналитические формулы (25) не очень удобны — хотя бы потому, что в процессе вычисления коэффициентов c_n по формулам (25) нам приходится решать довольно-таки нетривиальную задачу по поиску всех решений уравнения (26) в неотрицательных целых числах. Зачастую значительно более удобными оказываются рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты a_n, b_n и c_n у производящих функций, входящих в композиционную формулу (24). К получению такого рода соотношений мы сейчас и перейдем.

6.2.1. Обратимся еще раз к формуле (25). Заметим, что индексы у коэффициентов b_k в этой формуле зависят от конкретного решения уравнения в целых числах

$$1 \cdot k_1 + \ldots + n \cdot k_n = n,$$

то есть заранее не фиксируются. Нам же будет сейчас удобно наряду с n зафиксировать также и индекс $k = k_1 + \ldots + k_n$, то есть зафиксировать количество блоков в разбиении n-множества. По сути дела, мы хотим перегруппировать слагаемые в (25), записав коэффициенты c_n в виде

$$c_n = \sum_k b_k \cdot B_{n,k}(a_1, \ldots, a_n), \tag{27}$$

$$B_{n,k}(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k\\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\ldots\left(\frac{a_n}{n!}\right)^{k_n}. \tag{28}$$

С комбинаторной точки зрения функции $B_{n,k}(a_1,\ldots,a_n)$ описывают количество способов разбить n различимых предметов ровно на k неразличимых непустых блока, а затем совершить над элементами каждого такого блока размерами i_m комбинаторные действия a_{i_m} способами.

Казалось бы, мы ничуть не упростили себе задачу — ведь для вычисления функций $B_{n,k}$ по формулам (28) нам вместо решения задачи (26) приходится искать все решения в целых неотрицательных числах системы

$$\begin{aligned} k_1+\ldots+k_n &= k,\\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n &= n \end{aligned} \tag{29}$$

при фиксированных значениях параметров n и k. Однако у такой формы записи есть одно немаловажное преимущество: в ней, в отличие от формулы (25), явным образом разделены коэффициенты a_n и b_k производящих функций $F(z)$ и $G(z)$. Именно, все коэффициенты a_n собраны в функции $B_{n,k}$, которые, в свою очередь, никак не зависят от коэффициентов b_k. Оказывается, что это соображение можно положить в основу получения рекуррентных соотношений на функции $B_{n,k}$.

6.2.2. Действительно, предположим, что существуют рекуррентные соотношения, связывающие функции $B_{n,k}(a_1,\ldots,a_n)$. Так как эти функции никак не зависят от b_k, то они должны быть верными при любых значениях этих коэффициентов. Выберем тогда в качестве b_k выражения вида t^k, где t — некоторый произвольный параметр. С комбинаторной точки зрения такой выбор коэффициентов означает следующее: мы приписываем любому разбиению n-множества ровно на k блоков вес (или метку) t^k. Производящая функция

$$H(z) = 1 + t\frac{F(z)}{1!} + t^2\frac{[F(z)]^2}{2!} + \ldots + t^k\frac{[F(z)]^k}{k!} + \ldots$$

формально зависит теперь от двух переменных — z и t. Раскрывая в этом выражении скобки и собирая слагаемые при $z^n/n!$, мы можем переписать эту функцию в следующем виде:

$$H(z,t) = 1 + c_1(t)\frac{z}{1!} + c_2(t)\frac{z^2}{2!} + \ldots + c_n(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\text{где} \qquad c_n(t) := \sum_{k=1}^{n} t^k\cdot B_{n,k}, \qquad n>0.$$

Заметим теперь, что функция $H(z,t)$ представляет собой композицию двух функций — функции $G(z,t)=\exp(t\cdot z)$ и функции $F(z)$, то есть может быть записана как

$$H(z,t) = \exp(t\cdot F(z)).$$

А из такого рода равенства мы уже умеем получать нужные нам рекуррентные соотношения. Действительно, как и при выводе формул (22), продифференцируем это равенство по z и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях z:

$$\frac{\partial H(z,t)}{\partial z} = t\cdot\exp(t\cdot F(z))\cdot F'(z) = t\cdot H(z,t)\cdot F'(z) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad c_1(t) + c_2(t)\frac{z}{1!}z + \ldots + c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots =$$

$$= t \cdot \left(c_0(t) + c_1(t)\frac{z}{1!} + \ldots + c_n(t)\frac{z^n}{n!} + \ldots\right)\left(a_1 + a_2\frac{z}{1!} + \ldots + a_{n+1}\frac{z^n}{n!} + \ldots\right) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad c_{n+1}(t) = t\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c_i(t)\cdot a_{n+1-i}.$$

Вспоминая теперь, что $c_n(t) := \sum\limits_{k=1}^{n} t^k \cdot B_{n,k}$, мы последнее равенство можем переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_{n+1,k}\cdot t^k = t\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_{n+1-i}\sum_{k=0}^{i}B_{i,k}\cdot t^k = \sum_{k=0}^{n}t^{k+1}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}B_{i,k}\cdot a_{n+1-i}.$$

Все, что нам теперь остается сделать для получения рекуррентных соотношений на функции $B_{n,k}$ — это приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t^k. В результате данной операции мы получаем, что функции $B_{n,k}$ вычисляются по формулам

$$B_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}B_{i,k}\cdot a_{n+1-i}, \qquad k = 0,\ldots,n; \qquad B_{0,0} = c_0(t) = 1. \tag{30}$$

При этом предполагается, что $B_{n,0} = 0$ для всех $n > 0$, и $B_{0,k} = 0$ для всех $k > 0$.

Из полученных нами рекуррентных соотношений (30), в частности, следует, что функции $B_{n,k} = B_{n,k}(a_1,\ldots,a_n)$ представляют собой полиномы от переменных $a_1,\ldots,a_n$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Эти полиномы называются *полиномами Белла* и имеют огромное количество приложений как в комбинаторике, так и во многих других разделах математики.

6.2.3. Рассмотрим теперь важный частный случай полученных нами формул, а именно, случай, когда все коэффициенты a_n, $n > 0$, производящей функции $F(z)$ равны единице. Коэффициенты $B_{n,k} = B_{n,k}(1,\ldots,1)$ в этом случае описывают количество способов разложить n различимых предметов ровно по k неразличимым ящикам при условии, что в каждый ящик следует положить хотя бы один предмет. Иными словами, $B_{n,k}(1,\ldots,1)$ представляют собой не что иное, как числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$.

Отмеченное обстоятельство, в свою очередь, позволяет получить для чисел Стирлинга $S(n,k)$ удобные рекуррентные соотношения. Действительно, полагая в формулах (30) все коэффициенты a_n, $n > 0$, равными единице, мы получаем равенства вида $S(0,0) = 1$, $S(n+1,0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$,

$$S(n+1,k+1) = \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}S(i,k), \qquad k = 0,\ldots,n, \quad n = 0,1,\ldots \tag{31}$$

Наконец, подставляя $a_n = 1$, $n > 0$ в формулы (28), мы получаем еще одно представление чисел Стирлинга второго рода, а именно,

$$S(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k\\ 1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!(1!)^{k_1}\ldots(n!)^{k_n}}. \tag{32}$$

Данное соотношение полезно сравнить со следующей формулой для чисел Стирлинга $S(n,k)$, полученной в первой главе:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\widehat{S}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=n\\ k_i>0}}\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}.$$

В этой формуле, в отличие от (32), суммирование идет по всем *упорядоченным* разбиениям числа n.

7 Комбинаторика перестановок

7.1. В предыдущих двух параграфах мы в качестве примера достаточно часто приводили частный случай экспоненциальной (20) и композиционной (24) формул, соответствующий коэффициентам $a_n = 1$, $n > 0$. С комбинаторной точки зрения данный выбор коэффициентов описывает задачи, в которых мы разбиваем n-элементное множество на заранее не определенное число неразличимых блоков и не совершаем никаких дополнительных комбинаторных действий с элементами, находящимися в каждом из этих блоков. Основная задача данного параграфа — рассмотреть еще один важный случай формул (20) и (24), в котором коэффициенты $a_n = (n - 1)!$, $n > 0$.

7.1.1. С комбинаторной точки зрения подобный выбор коэффициентов означает, что мы после разбиения n-элементного множества на неразличимые блоки *циклически упорядочиваем* элементы в каждом из этих блоков. Посмотрим вначале, что мы сможем получить из экспоненциальной формулы (20) при таком выборе коэффициентов a_n.

Подстановка в формулу (20) производящей функции

$$F(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots = \ln\frac{1}{1-z}$$

дает нам следующее представление для функции $C(z) := \exp(F(z))$:

$$C(z) = C_0 + C_1\frac{z}{1!} + C_2\frac{z^2}{2!} + \ldots = \exp\Big(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2} + \ldots\Big) =$$

$$= \exp\Big(\ln\frac{1}{1-z}\Big) = \frac{1}{1-z} = 1 + 1!\frac{z}{1!} + 2!\frac{z^2}{2!} + \ldots + n!\frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Иными словами, мы получили, что количество C_n способов разбить всеми возможными способами n-элементное множество на блоки, а затем циклически упорядочить элементы в каждом блоке, равно $n!$. С другой стороны, мы знаем, что $n!$ есть количество всех возможных перестановок n-элементного множества $[n]$. Оказывается, две эти комбинаторные интерпретации чисел $n!$ тесно связаны между собой.

7.1.2. Действительно, любую перестановку можно представить в виде произведения нескольких более простых перестановок, называемых циклами. Например, перестановку

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

можно записать в виде циклов

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

а перестановку

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

можно представить в виде произведения пары циклов $(1\ 4)(2\ 3)$:

$$\tau = (1\ 4)\,(2\ 3) = (2\ 3)\,(1\ 4) = (4\ 1)\,(2\ 3) = \ldots$$

Но ведь это, по сути, и означает, что для задания любой перестановки мы должны совершить следующие комбинаторные действия: разбить n-элементное множество $[n]$ на блоки, а затем задать в каждом блоке циклическую структуру, то есть циклически упорядочить элементы в каждом блоке. Ровно эти действия и описывает нам экспоненциальная формула (20) в случае, когда $a_n = (n-1)!$.

7.1.3. Итак, оказалось, что с точки зрения экспоненциальной формулы (20) числа $C_n = n!$ в случае $a_n = (n-1)!$ являются аналогами чисел Белла B_n, появляющихся из этой же формулы в случае, когда $a_n = 1$. Продолжим далее эту аналогию и рассмотрим теперь частный случай композиционной формулы, в которой по-прежнему $a_n = (n-1)!$, а коэффициенты $b_k = t^k$.

Легко понять комбинаторный смысл коэффициентов $c(n,k)$ при $t^k z^n/n!$ у производящей функции

$$C(z,t) = G(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, t^k \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Действительно, $c(n,k)$ есть количество способов разбить n-элементное множество ровно на k блоков, а затем циклически упорядочить элементы в каждом блоке. На языке перестановок эти коэффициенты описывают нам количество перестановок, имеющих фиксированное число циклов, равное k.

Напомним, что в случае $a_n = 1$ мы при аналогичном выборе b_k получали в качестве коэффициентов в разложении функции $H(z,t)$ по степеням z и t числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$. Неудивительно поэтому, что коэффициенты $c(n,k)$ называются числами Стирлинга первого рода.

7.2. Наряду с числами Стирлинга второго рода, числа Стирлинга первого рода чрезвычайно широко используются как в комбинаторике, так и в других разделах математики. Рассмотрим основные свойства этих чисел.

7.2.1. Заметим, прежде всего, что введенные в предыдущем параграфе полиномы Белла позволяют записать явные аналитические выражения для чисел Стирлинга первого рода. Действительно, подставляя в формулы (**??**) для этих полиномов значения $a_n = (n-1)!$, получаем, что

$$c(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_{n-k+1}!} \cdot \frac{1}{(1)^{k_1}(2)^{k_2}\ldots(n-k+1)^{k_{n-k+1}}}.$$

7.2.2. Запишем теперь явное выражение для производящей функции, описывающей числа Стирлинга первого рода:

$$C(z,t) = \exp\left(t \cdot \ln \frac{1}{1-z}\right) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^t = \frac{1}{(1-z)^t}. \tag{33}$$

С использованием этой функции можно получить множество полезных свойств чисел Стирлинга первого рода.

Выведем, к примеру, рекуррентное соотношение для этих чисел. Начнем с граничных условий. По определению, $c(0,0) = 1$. Далее, ясно, что $c(n,0) = 0$ для $n > 0$ — нельзя непустое множество разбить на ноль блоков. Очевидно также, что $c(n,n) = 1$ — единственному разбиению n на n блоков отвечает тождественная перестановка. Наконец, понятно, что $c(n,k) = 0$ для всех $k > n$.

Вернемся к производящей функции

$$C(z,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\,t^k\right)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)\frac{z^n}{n!}$$

и рассмотрим формальный степенной ряд

$$\frac{\partial C}{\partial z}=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(t)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!}. \tag{34}$$

Согласно явной формуле (33) для функции $C(z)$,

$$\frac{\partial C}{\partial z}=\frac{t}{(1-z)^{t+1}}=\frac{t}{1-z}C(z,t)\qquad\Longleftrightarrow\qquad(1-z)\frac{\partial C}{\partial z}=t\,C(z,t).$$

Последнее равенство с учетом (34) можно переписать так:

$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!}=t\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)\frac{z^n}{n!}\qquad\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}(t)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}+t\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,c_n(t)\frac{z^n}{n!}+t\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)\frac{z^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$c_{n+1}(t)=n\cdot c_n(t)+t\cdot c_n(t),\qquad\qquad n=0,1,2,\ldots$$

Отсюда получается следующее равенство, связывающее числа $c(n,k)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}c(n+1,k)\,t^k=n\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\,t^k+\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\,t^{k+1}.$$

Заметим теперь, что $c(n,0)=0$ для всех $n>0$, и что $c(n,k)=0$ для всех $k>n$. С учетом этих равенств мы последнее равенство можем переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n+1}c(n+1,k)\,t^k=n\sum_{k=1}^{n+1}c(n,k)\,t^k+\sum_{k=1}^{n+1}c(n,k-1)\,t^k.$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях t, мы получаем искомое рекуррентное соотношение для чисел Стирлинга первого рода:

$$c(n+1,k)=n\cdot c(n,k)+c(n,k-1),\qquad\qquad k=1,2,\ldots,n+1,\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{35}$$

$$c(0,0)=1,\qquad c(n,0)=0\quad\forall\,n=1,2,\ldots,\qquad c(n,k)=0\quad\forall\,k>n.$$

7.2.3. Получим с помощью формулы (33) еще одно чрезвычайно полезное соотношение для чисел $c(n,k)$. Воспользуемся для этого формулой бинома Ньютона:

$$\frac{1}{(1-z)^t}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-t)(-t-1)\ldots(-t-n+1)}{n!}(-1)^nz^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t\cdot(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!}z^n.$$

Следовательно, коэффициенты $c_n(t)$ при $z^n/n!$ у производящей функции $C(z,t)$ могут быть записаны в следующем явном виде:

$$c_0(t) \equiv 1, \qquad c_n(t) := \sum_{k=0}^{n} c(n,k)t^k = t\cdot(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1) =:\equiv (t)^n, \quad n>0. \tag{36}$$

Числа $(t)^n$ называются возрастающими факториальными числами. Мы, таким образом, показали, что числа Стирлинга первого рода $c(n,k)$ есть коэффициенты в разложении возрастающего факториального числа $t^{\bar{n}}$ по степеням t^k.

7.2.4. Числа $c(n,k)$ называются иногда числами Стирлинга первого рода без знака. Наряду с этими числами также вводятся так называемые числа $s(n,k)$ Стирлинга первого рода со знаком

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k) = (-1)^{k-n}c(n,k).$$

Заменим в формуле (36) t на $(-t)$:

$$c_n(-t) := \sum_{k=0}^{n} c(n,k)(-1)^k t^k = (-1)^n t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1).$$

Домножая левую и правую часть последнего равенства на $(-1)^n = (-1)^{n-2k}$, получим

$$(-1)^n c_n(-t) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k = t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1) =: (t)_n.$$

Числа $(t)_n$ называются убывающими факториальными числами, а числа $s(n,k)$ Стирлинга первого рода со знаком представляют собой, таким образом, коэффициенты в разложении убывающего факториального числа по степеням t^k.

7.2.5. Вспомним, наконец, что числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$ появлялись в разложении вида

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(t)_k.$$

Сравнивая это соотношение с формулой

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,t^k,$$

мы видим, что числа $S(n,k)$ и $s(n,k)$ взаимно-обратны в следующем смысле:

$$\sum_{i=k}^{n} S(n,i)\cdot s(i,k) = \sum_{i=0}^{k} s(n,i)\cdot S(i,k) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n=k, \\ 0, & n\neq k. \end{cases} \tag{37}$$

Действительно,

$$(t)_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)\,t^i = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)\,\sum_{k=0}^{i}(t)_k\cdot S(i,k) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{i=k}^{n} s(n,i)\cdot S(i,k)\right\}(t)_k.$$

С алгебраической точки зрения равенства (37) можно трактовать следующим образом. Пусть у нас имеются два базиса в пространстве функций: степенной базис $\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\} =: B_p$

и так называемый факториальный базис $\{1, t, t(t-1), \ldots, (t)_n, \ldots\} =: B_f$. Тогда матрицы S и s, составленные из чисел Стирлинга второго и первого рода, являются матрицами перехода от одного базиса к другому:

$$B_f = s \cdot B_p, \qquad B_p = S \cdot B_f, \qquad s \cdot S = S \cdot s = I,$$

где I — единичная матрица.

7.3. Итак, мы достаточно подробно рассмотрели частный случай экспоненциальной и композиционной формул, в которых коэффициенты $a_n = (n-1)!$ для всех $n > 0$. Давайте теперь рассмотрим чуть более общий класс задач, в которых часть коэффициентов $a_n = (n-1)!$, а часть этих коэффициентов равна нулю. С комбинаторной точки зрения равенство $a_n = 0$ означает, что мы исключаем из рассмотрения перестановки, имеющие циклы длины n.

7.3.1. Рассмотрим в качестве характерного примера задачу, связанную с подсчетом перестановок, в которых отсутствуют единичные циклы. В этой задаче $a_0 = a_1 = 0$, а коэффициенты $a_n = (n-1)!$ для всех $n > 1$. Подставляя производящую функцию

$$F(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots = \ln \frac{1}{1-z} - z$$

в экспоненциальную формулу (20), получаем, что

$$D(z) := D_0 + D_1 \frac{z}{1!} + D_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots = \exp(F(z)) = \exp\Big(\ln \frac{1}{1-z} - z\Big) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

В результате мы получили знакомую нам из первого параграфа формулу для производящей функции, описывающей количество D_n перестановок множества $[n]$, в которых все элементы меняют свое положение (задача о беспорядках). Иными словами, с точки зрения композиции производящих функций числа D_n являются аналогами чисел Белла B_n в задаче о разбиении n-множества на блоки, а также факториальных чисел $n!$ в задаче о подсчете всех перестановок.

7.3.2. Теперь несколько усложним эту задачу, а именно, подсчитаем количество $d(n,k)$ перестановок, не содержащих циклов единичной длины и состоящих ровно из k циклов. Числа $d(n,k)$ с точки зрения описываемого в настоящем параграфе подхода являются аналогами чисел Стирлинга второго рода $S(n,k)$ в задаче о разбиении n-множества ровно на k блоков, а также чисел Стирлинга первого рода $c(n,k)$ в задаче о подсчете количества всех перестановок, имеющих ровно k циклов. Как следствие, числа $d(n,k)$ носят название присоединенных чисел Стирлинга первого рода.

Экспоненциальная производящая функция для этих чисел получается подстановкой в композиционную формулу (24) значений $b_k = t^k$ и $a_n = (n-1)!$, $n > 1$:

$$D(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} d(n,k)\, t^k \Big) \frac{z^n}{n!} = \exp\Big[t \cdot \Big(\frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots \Big) \Big] = \frac{e^{-tz}}{(1-z)^t}. \tag{38}$$

Сравнивая формулы (33) и (38), мы видим, что экспоненциальные производящие функции для чисел $c(n,k)$ и $d(n,k)$ связаны соотношением вида

$$C(z,t) = e^{tz} \cdot D(z,t) \qquad \Longrightarrow \qquad c(n,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} d(n-i, k-i). \tag{39}$$

7.3.3. Используя производящую функцию $D(z,t)$, достаточно просто получить рекуррентные соотношения для чисел $d(n,k)$. Далее - самостоятельно на практике.

7.4. В заключение данного параграфа вновь вернемся к частному случаю экспоненциальной формулы, в которой коэффициенты $a_n = (n-1)!$. Мы показали, что подстановка этих значений в формулу (20) дает нам в качестве коэффициентов c_n производящей функции $C(z) = \exp(F(z))$ количество $C_n = n!$ всех перестановок n-множества $[n]$. Давайте теперь посмотрим, что даст нам подстановка в ту же формулу выражений вида

$$a_n = (n-1)!\,x_n, \qquad n > 0,$$

где x_n — некоторые параметры, зависящие от индекса n.

7.4.1. Подставляя коэффициенты $a_n = (n-1)!\,x_n$ в экспоненциальную формулу, мы получим производящую функцию вида

$$C(z) = \exp(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{z^n}{n!},$$

коэффициенты при $z^n/n!$ в которой зависят уже от n параметров $x_1,\ldots,x_n$. Нам бы хотелось понять комбинаторный смысл коэффициентов $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$.

Напомним, что в частном случае $x_i = 1$ мы при $z^n/n!$ получали количество $n!$ всех перестановок длины n. При этом комбинаторная трактовка соответствующих действий у нас была такова: мы брали n-элементное множество, разбивали его на непустые неразличимые блоки, а затем циклически упорядочивали i элементов, попавших в конкретный блок. В результате мы получали некоторую перестановку n элементов, состоящую из заранее не фиксированного количества циклов. Общее же количество способов совершить такого рода комбинаторные действия совпадало с количеством всех перестановок, то есть равнялось $n!$.

В случае $a_i = (i-1)!\,x_i$ мы разбиваем n-элементное множество на заранее не фиксированное число непустых неразличимых блоков, $(i-1)!$ количеством способов циклически упорядочиваем i элементов, попавших в конкретный блок, а затем приписываем каждому такому блоку метку x_i. В результате мы получаем некоторую перестановку длины n, разбитую на заранее не фиксированное количество циклов, в которой любому циклу длины i приписана метка x_i. Иными словами, комбинаторные рассуждения подсказывают нам, что функция $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$ должна представлять собой линейную комбинацию мономов вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, коэффициенты $\lambda_{k_1,\ldots,k_n}$ при которых описывают нам количество способов получить перестановку длины n, состоящую из k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, и так далее.

7.4.2. Для того, чтобы подтвердить предположения о структуре функции $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$, полученные из комбинаторных соображений, а также для того, чтобы получить явный вид коэффициентов $\lambda_{k_1,\ldots,k_n}$, воспользуемся формулой Фаа ди Бруно (25). Подставляя в эту формулу выражения $a_i = (i-1)!\,x_i$ и $b_k = 1$, мы получаем следующее выражение на коэффициенты $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$ при $z^n/n!$ функции $G(z)$:

$$\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_n!}\left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1}\ldots\left(\frac{x_n}{n}\right)^{k_n} = \sum_{1\cdot k_1+\ldots+n\cdot k_n=n} \frac{n!}{k_1!\,1^{k_1}\ldots k_n!\,n^{k_n}}\,x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}. \tag{40}$$

Видно, что эта функция действительно представляет собой линейную комбинацию мономов вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$. Коэффициенты же $\lambda_{k_1,\ldots,k_n}$, описывающие количество перестановок, имеющих

k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, и так далее, описываются формулами вида

$$\lambda_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!\,1^{k_1}\ldots k_n!\,n^{k_n}}.$$

7.4.3. Полиномы $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$ при фиксированном n принято называть *дополненными цикловыми индексами,* а коэффициенты

$$Z_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n). \tag{41}$$

цикловыми индексами множества всех перестановок n-элементного множества. Запишем выражения для коэффициентов $\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)$ для нескольких первых значений параметра n:

$$\widetilde{Z}_1(x_1) = x_1,$$

$$\widetilde{Z}_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2,$$

$$\widetilde{Z}_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3,$$

$$\widetilde{Z}_4(x_1,\ldots,x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4.$$

Третье равенство, в частности, означает, что множество всех перестановок 3-элементного множества содержит единственный цикл, содержащий 3 перестановки единичной длины (тождественная перестановка (1)(2)(3)), три перестановки, содержащие один цикл единичной длины и один двойной цикл (перестановки (1 2)(3), (1 3)(2), (2 3)(1)), а также две перестановки, имеющие единственный цикл длины три (перестановки (1 2 3) и (1 3 2)).

7.4.4. Помимо явных формул, полезно также иметь рекуррентные формулы для вычисления цикловых индексов. Подставляя в полученные нами ранее рекуррентные соотношения (22) значения $a_n = (n-1)!\,x_n$, мы получаем формулы вида

$$\widetilde{Z}_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(n)_i x_{i+1}\widetilde{Z}_{n-i}(x_1,\ldots,x_{n-i}).$$

Так, например,

$$\widetilde{Z}_5 = x_1\widetilde{Z}_4 + 4x_2\widetilde{Z}_3 + 12x_3\widetilde{Z}_2 + 24x_4\widetilde{Z}_1 + 24x_5\widetilde{Z}_0 =$$
$$= x_1(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4) + 4x_2(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) + 12x_3(x_1^2 + x_2) + 24x_4x_1 + 24x_5 =$$
$$= x_1^5 + 10x_1^3x_2 + 15x_1x_2^2 + 20x_1^2x_3 + 20x_2x_3 + 30x_1x_4 + 24x_5.$$

8 Перечисление корневых деревьев. Формула обращения Лагранжа

8.1. Известно, что количество a_n деревьев, построенное на n вершинах, равно n^{n-2}. Задача данного параграфа состоит в том, чтобы получить этот результат с помощью производящих функций.

8.1.1. Оказывается, что при таком подходе нам будет удобнее начать с перечисления так называемых *корневых* помеченных деревьев.

Определение 8.1. Корневым помеченным деревом называется помеченное дерево, в котором одна из вершин выделена и рассматривается как корень этого дерева.

Так как любую из вершин дерева можно выбрать в качестве его корня, то количество t_n корневых деревьев в n раз больше количества a_n всех деревьев. Иными словами, нам с помощью аппарата производящих функций нужно доказать, что количество таких деревьев равно $t_n = n \cdot a_n = n^{n-1}$.

8.1.2. Обозначим через

$$T(z) = t_1 \frac{z^1}{1!} + t_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + t_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

экспоненциальную производящую функцию для количества корневых деревьев, построенных на $n \geqslant 1$ вершинах. Полезно наряду с корневым деревом ввести понятие корневого леса как (возможно, пустой) набор, состоящий из нескольких корневых деревьев. Ранее мы показали, что производящие функции $G(z)$ и $G^{(c)}(z)$, описывающие количество простых графов и простых связных графов соответственно, связаны между собой экспоненциальной формулой. Совершенно аналогичные рассуждения показывают, что экспоненциальная производящая функция

$$F(z) = f_0 + f_1 \frac{z^1}{1!} + f_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + f_n \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

описывающая количество таких лесов, связана с производящей функцией $T(z)$ формулой

$$F(z) = \exp(T(z)).$$

Заметим теперь, что любому лесу, построенному на $(n-1)$-й вершине, можно взаимно-однозначно поставить в соответствие корневое дерево на n вершинах. Действительно, добавляя еще одну вершину, соединяя ее с корнями деревьев, образующих лес, и назначая добавленную вершину корневой, мы получим некоторое корневое дерево на n вершинах. Обратно, удаляя у дерева корневую вершину x и назначая у получившихся в результате удаления вершины x деревьев корнями вершины, которые в исходном дереве были смежными с x, мы получаем некоторый корневой лес.

На языке производящих функций отмеченное взаимно-однозначное соответствие эквивалентно равенству вида

$$T(z) = z \cdot F(z).$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить комбинаторный смысл произведения двух экспоненциальных производящих функций — функции $F(z)$ и функции

$$G(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z}{1!} + 0 \cdot \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

Такой выбор функции $G(z)$ гарантирует нам разбиение n-элементного множества вершин на два блока, один из которых гарантированно содержит единственную вершину x. Строя на оставшихся вершинах, попавших во второй блок, корневой лес, и соединяя корневые вершины этого леса с x, мы получаем корневое дерево на n вершинах.

Вспоминая теперь, что $F(z) = \exp(T(z))$, мы получаем следующее уравнение на производящую функцию $T(z)$:

$$T(z) = z \cdot \exp(T(z)). \tag{42}$$

Все, что теперь осталось — это научиться решать функциональное уравнение (42).

8.2. Для решения уравнения (42) нам понадобятся некоторые весьма полезные и часто использующиеся в перечислительной комбинаторике дополнительные понятия и факты из теории формальных степенных рядов.

8.2.1. Вернемся к теории формальных степенных рядов. Выделим в кольце $K[[x]]$ формальных степенных рядов вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

множество $z\,K[[z]]$ формальных степенных рядов с нулевым свободным членом. На таком множестве, как мы уже знаем, можно ввести операцию композиции $g(f(z))$. Исследуем свойства этой операции.

8.2.2. Несложно убедиться в том, что эта операция ассоциативна, и что для нее существует нейтральный элемент, равный z. Следовательно, множество $z\,K[[z]]$ с введенной на нем бинарной операцией композиции образует моноид (полугруппу с единицей) относительно этой операции.

Определение 8.2. Формальный степенной ряд $g(z)$ называется обратным к $f(z) \in z\,K[[z]]$ (в смысле композиции), если

$$g(f(z)) = f(g(z)) = z.$$

Оказывается, не все элементы множества $z\,K[[z]]$ имеют обратный (как следствие, $z\,K[[z]]$ вместе с введенной на нем операцией композиции группой не является). Следующая простая теорема дает необходимое и достаточное условие существования обратного к $f(z)$ в смысле композиции элемента $g(z) \in z\,K[[z]]$.

Теорема 8.3. *Формальный степенной ряд*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

имеет обратный ряд $g(z)$ тогда и только тогда, когда коэффициент a_1 отличен от нуля. При этом такой обратный элемент $g(z)$ единственен.

Доказательство. Предположим, что формальный степенной ряд

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

удовлетворяет равенству $g(f(z)) = z$, или, более подробно,

$$b_1(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^2 + b_3(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^3 + \ldots = z.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, мы получаем бесконечную цепочку линейных уравнений на коэффициенты b_n вида

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= 1, \\ a_2 b_1 + a_1^2 b_2 &= 0, \\ a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{43}$$

из которой (при условии, что $a_1 \neq 0$) последовательно и однозначно можно найти коэффициенты $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

Аналогичные рассуждения показывают, что и в случае $f(g(z)) = z$ коэффициенты b_n определяются по тем же самым формулам. Иными словами, в случае $a_1 \neq 0$ формальный степенной ряд $g(z)$, удовлетворяющий соотношениям $g(f(z)) = f(g(z)) = z$, существует и единственен. $\square$

8.2.3. Теорема 8.3 уже позволяет нам получить из уравнения (42) количество корневых помеченных деревьев. Действительно, мы показали, что производящая функция $T(z)$ для количества деревьев удовлетворяет уравнению вида

$$T(z) \cdot \exp(-T(z)) = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(T(z)) = z,$$

где

$$G(z) = z \cdot e^{-z} = z - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^3}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n!} + \ldots$$

Введем вместо $T(z)$ и $G(z)$ обыкновенные производящие функции

$$t(z) := \widehat{t}_1 z + \widehat{t}_2 z^2 + \widehat{t}_3 z^3 + \ldots, \qquad \widehat{t}_n = \frac{t_n}{n!}$$

и

$$g(z) = z - z^2 + \frac{1}{2!} z^3 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} z^{n+1} + \ldots$$

В этих обозначениях формула (42) переписывается так:

$$g(t(z)) = z. \tag{44}$$

Зная коэффициенты ряда $g(z)$, можно с помощью цепочки равенств (43) последовательно сосчитать числа $\widehat{t_n}$, а следовательно, и количество t_n всех корневых помеченных деревьев, построенных на n вершинах:

$$\begin{array}{llllll}
z^1: & \widehat{t}_1 = 1 & \Longrightarrow & \widehat{t}_1 = 1 & \Longrightarrow & t_1 = 1! \cdot 1 = 1, \\
z^2: & -(\widehat{t}_1)^2 + \widehat{t}_2 = 0 & \Longrightarrow & \widehat{t}_2 = 1 & \Longrightarrow & t_2 = 2! \cdot 1 = 2, \\
z^3: & (\widehat{t}_1)^3/2 - 2\widehat{t}_2 + \widehat{t}_3 = 0 & \Longrightarrow & \widehat{t}_3 = 3/2 & \Longrightarrow & t_3 = 3! \cdot 3/2 = 9, \quad \ldots
\end{array}$$

8.3. Итак, нам удалось с помощью формулы (42) построить алгоритм подсчета количества всех помеченных корневых деревьев. Нам же хочется большего — доказать, что из этой формулы следует известное нам явное выражение $t_n = n^{n-1}$ для количества таких деревьев. Для достижения этой цели нам вновь придется вернуться к теории формальных степенных рядов.

8.3.1. Кольцо формальных степенных рядов $K[[z]]$ удобно иногда рассматривать как вложение в некую более широкую алгебраическую структуру — поле $K((z))$ формальных рядов Лорана вида

$$\varphi(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

то есть формальных степенных рядов, имеющих конечное число слагаемых с отрицательными степенями z. Для читателей, знакомых с теорией алгебраических структур, следует отметить, что $K((z))$ можно рассматривать как поле частных кольца $K[[z]]$ (см., например, [6]).

Определение 8.4. Коэффициент a_{-1} при z^{-1} в ряде Лорана $\varphi(z) \in K((z))$ называется *вычетом* ряда $\varphi(z)$ и обозначается как $\mathrm{Res}(\varphi(z))$.

Теорема 8.5 (Лагранж)**.** *Пусть*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots, \qquad b_1 \neq 0,$$

есть пара формальных степенных рядов, взаимно-обратных по отношению к операции композиции, то есть таких, что $f(g(z)) = g(f(z)) = z$. Тогда коэффициент b_n равен вычету формального ряда Лорана $\varphi(z) = 1/(n \cdot f^n(z))$:

$$b_n := [z^n]\, g(z) = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{n\, f^n(z)}\right) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{f^n(z)}. \tag{45}$$

Доказательство. Распишем подробнее равенство $g(f(z)) = z$:

$$b_1 f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots + b_n f^n(z) + \ldots = z.$$

Дифференцируя последнее соотношение по z, получаем

$$b_1 f'(z) + 2b_2 f(z) f'(z) + \ldots + n b_n f^{n-1}(z) f'(z) + \ldots = 1.$$

Теперь поделим полученное равенство на $f^n(z)$:

$$b_1 \frac{f'(z)}{f^n(z)} + 2b_2 \frac{f'(z)}{f^{n-1}(z)} + \ldots + n\, b_n \frac{f'(z)}{f(z)} + (n+1)\, b_{n+1} f'(z) + \ldots = \frac{1}{f^n(z)}. \tag{46}$$

Сосчитаем коэффициент при z^{-1} в левой части равенства (46). Оказывается, ненулевой вклад в коэффициент при z^{-1} может давать только слагаемое $n\, b_n\, f'(z)/f(z)$, а вклад от остальных слагаемых в этот коэффициент равен нулю.

Действительно, для любых $k \neq -1$ выражение вида $f^k(z)\, f'(z)$ можно переписать в виде

$$f^k(z) \cdot f'(z) = \frac{1}{k+1}(f^{k+1}(z))', \qquad k = -n, -n+1, \ldots, -2, 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим теперь, что если функция $\varphi(z) \in K((z))$, то есть представляет собой формальный ряд Лорана

$$\varphi(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-n+1}}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

то производная такого ряда имеет вид

$$\varphi'(z) = -n\frac{c_{-n}}{z^{n+1}} - (n-1)\frac{c_{-n+1}}{z^n} - \ldots - \frac{c_{-1}}{z^2} + c_1 + 2c_2 z + \ldots$$

и не содержит слагаемого с $1/z$. Иными словами, вычет функции $\varphi'(z)$ равен нулю для любой $\varphi(z) \in K((z))$. Как следствие, все коэффициенты при z^{-1} в слагаемых вида $f^k(z)\, f'(z)$ в случае $k \neq -1$ действительно равны нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что коэффициент при z^{-1} в выражении

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots}{a_1 z + a_2 z^2 + \ldots} = \frac{1}{z}\left[\frac{1 + 2\frac{a_2}{a_1} z + \ldots}{1 + \frac{a_2}{a_1} z + \ldots}\right] = \frac{1}{z}\left[1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots\right]$$

равен единице. Действительно, несложно убедиться в том, что в результате деления двух степенных рядов, коэффициенты при z^0 у которых равны единице, получается степенной ряд

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

у которого коэффициент при z^0 также равен единице.

Итак, мы показали, что коэффициент при z^{-1} в левой части равенства (46) равен $n\, b_n$, то есть коэффициент b_n действительно равен деленному на n вычету стоящей в правой части (46) функции $1/f^n(z)$. □

8.3.2. При перечислении деревьев мы пришли к уравнению (44), являющемуся частным случаем уравнения вида

$$g(z) = z \cdot r(g(z)). \tag{47}$$

в котором

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad b_1 \neq 0, \qquad\qquad r(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad a_0 \neq 0. \tag{48}$$

Такие уравнения довольно часто встречаются на практике, поэтому имеет смысл сформулировать для них утверждение, аналогичное (45).

Следствие 8.6. *Пусть два формальных степенных ряда (48) связаны между собой соотношением (47). Тогда коэффициенты b_n формального степенного ряда $g(z)$ выражаются через коэффициенты ряда $r(z)$ по формулам*

$$b_n := [z^n]\, g(z) = \frac{1}{n}[z^{n-1}] r^n(z). \tag{49}$$

Доказательство. Перепишем уравнение (47) в виде

$$\frac{g(z)}{r(g(z))} = z$$

и введем функцию $f(z) = z/r(z)$. В результате мы вместо (47) получаем уравнение

$$f(g(z)) = z = g(f(z)).$$

Теперь для определения коэффициентов b_n можно воспользоваться формулой Лагранжа (45):

$$b_n = [z^n] g(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}] \frac{1}{f^n(z)}.$$

Вспоминая, что $f(z) = z/r(z)$, последнюю формулу можно переписать так:

$$b_n = [z^n] g(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}] \frac{r^n(z)}{z^n}.$$

Для доказательства (49) осталось заметить, что если

$$\varphi(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots = \frac{r^n(z)}{z^n} =: \frac{1}{z^n}[\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 z + \ldots + \widehat{a}_{n-1} z^{n-1} + \widehat{a}_n z^n + \ldots],$$

то коэффициент c_{-1} при z^{-1} совпадает с коэффициентом $\widehat{a}_{n-1}$ в правой части последнего равенства:

$$\operatorname{Res}(\varphi(z)) = c_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{r^n(z)}{z^n}\right) = \widehat{a}_{n-1} = [z^{n-1}] r^n(z).$$

□

Замечание 8.7. Помимо формальных, существуют и чисто комбинаторные доказательства равенства (49). Одно из таких доказательств, основанное на теории комбинаторных видов, можно посмотреть в [2, 3].

8.3.3. В качестве приложения доказанного выше результата (49) получим, наконец, с помощью равенства (42) количество всех корневых помеченных деревьев.

В этом частном случае $b_n = \widehat{t}_n$, $r(z) = e(z)$,

$$e^n(z) = 1 + nz + \frac{n^2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{n^n}{n!}z^n + \ldots,$$

и потому

$$\widehat{t}_n = \frac{1}{n}[z^{n-1}]e^n(z) = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad t_n = n^{n-1}.$$

8.3.4. В параграфе, посвященном экспоненциальной формуле, мы упоминали, что если экспоненциальная производящая функция $F(z)$ перечисляет некоторые односвязные структуры, то функция вида $[F(z)]^k/k!$ перечисляет соответствующие k-связные структуры. С этой точки зрения полезным оказывается следующее обобщение теорем (45) и (49).

Теорема 8.8. *Пусть*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots, \qquad b_1 \neq 0,$$

есть пара формальных степенных рядов, взаимно-обратных по отношению к операции композиции, то есть таких, что $f(g(z)) = g(f(z)) = z$. Тогда коэффициент при z^n у функции $g^k(z)$ равен вычету формального ряда Лорана $\varphi(z) = kz^{k-1}/(n \cdot f^n(z))$:

$$[z^n]\, g^k(z) = \operatorname{Res}\left(\frac{kz^{k-1}}{n\, f^n(z)}\right) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{kz^{k-1}}{f^n(z)}. \tag{50}$$

В случае же, когда формальные степенные ряды вида (48) связаны равенством $g(z) = z \cdot r(g(z))$, соответствующий коэффициент вычисляется по формуле

$$[z^n]\, g^k(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]r^n(z). \tag{51}$$

Доказательство этих равенств практически полностью повторяют доказательство теоремы Лагранжа (45) и его следствия (49).

В качестве примера вновь вернемся к корневым помеченным деревьям. В этом случае

$$[z^n]t^k(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]e(nz) = \frac{k}{n} \cdot \frac{n^{n-k}}{(n-k)!},$$

поэтому количество k-компонентных корневых помеченных деревьев на n-элементном множестве вершин равно

$$\frac{n!}{k!} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}.$$

8.3.5. Формула (45) была получена Лагранжем в конце XVIII века как результат решения задачи о построении функции, обратной данной. Именно, пусть у нас имеется функция

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Требуется построить обратную к ней функцию

$$x = g(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

Так как $y = f(x)$, то задача эквивалентна нахождению коэффициентов b_n ряда $g(z)$ по коэффициентам a_n ряда $f(z)$ при условии, что эти ряды связаны равенством вида $z = g(f(z))$.

Данная задача была обобщена современником Лагранжа Гансом Бурманом (Hans Bürmann). Бурман захотел построить разложение заданной функции $G(z)$ в ряд

$$G(z) = b_0 + b_1 f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots + b_n f^n(z) + \ldots$$

по степеням известной функции $f(z)$. В частном случае

$$G(z) = z, \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

мы приходим к задаче Лагранжа об обращении заданной функции $y = f(x)$. Бурман показал, что в более общей постановке произвольной функции $G(z)$ коэффициенты b_n определяются по формулам

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ G'(z) \frac{z^n}{f^n(z)} \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

В XX веке выяснилось, что и такая более общая задача имеет многочисленные приложения в комбинаторике (смотри, например, [2, 3]).

Перечисление непомеченных объектов.

В предыдущей главе мы с помощью основных операций над экспоненциальными производящими функциями научились перечислять большое количество помеченных объектов, таких, например, как связные графы, эйлеровы графы, двудольные графы, деревья, и так далее. Однако при более тщательном анализе полученных результатов практически у любого читателя, впервые сталкивающегося с задачами перечисления графов, возникает довольно естественный вопрос — а зачем нам различать графы, отличающиеся друг от друга лишь пометками своих вершин?

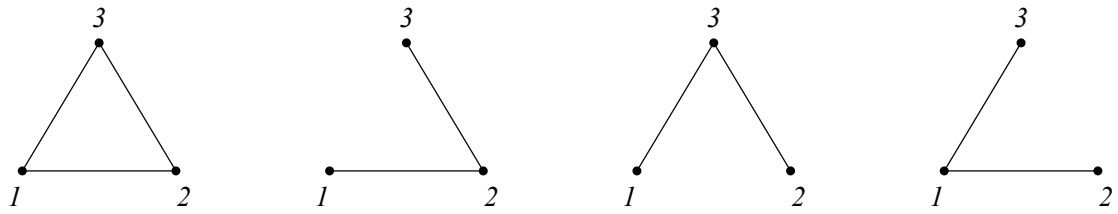


Рис. 2: Помеченные связные графы на трех вершинах

Рассмотрим, к примеру, связные простые графы, построенные на n различимых вершинах. На рис.2 показаны все такие графы, отвечающие случаю $n = 3$. Понятно, что последние три из них отличаются лишь разметкой своих вершин и представляют собой, по сути, одно и то же дерево. Иными словами, более логичным и естественным было бы утверждение о том, что на трех вершинах можно построить всего лишь два существенно различающихся между собой связных графа — изображенный на рис.3,a циклический граф, а также дерево, показанное на рис.3,b. Такие графы, в отличие от помеченных графов, представленных на рис.2, естественно называть *непомеченными* графами. Технике перечисления подобного рода объектов и посвящена данная глава.

Рис. 3: Непомеченные связные графы

9 Понятие непомеченного объекта

9.1. Давайте для начала разберемся с тем, как нам формально определить понятие непомеченного объекта. Оказывается, наиболее естественный способ дать такое определение связан с понятием действия некоторой группы G на множестве X помеченных объектов.

9.1.1. В качестве характерного примера обратимся к задаче о подсчете количества триангуляций правильных $(n + 2)$-угольников. Еще в первой главе мы выяснили, что количество таких триангуляций в случае, когда вершины многоугольника помечены цифрами от 1 до $(n+2)$, расположенными в циклическом порядке против часовой стрелки, описывается числами Каталана

c_n. Так, для $n = 2$ имеются две различные триангуляции квадрата с помеченными вершинами, для $n = 3$ — пять, а для $n = 4$ — четырнадцать (рис.4).

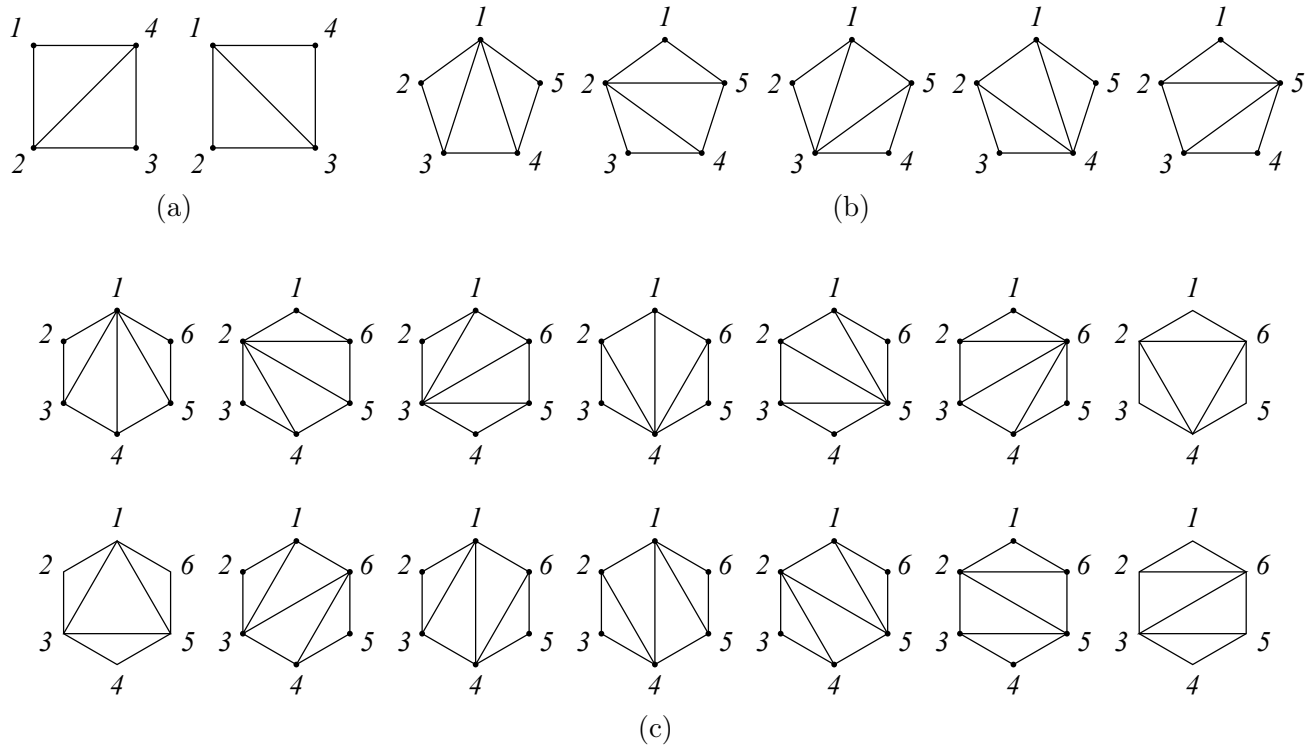


Рис. 4: Триангуляции

Однако интуитивно ясно, что различать две триангуляции квадрата и пять триангуляций пятиугольника, показанные на рис.4,a и рис.4,b, в общем-то, не следует — все они переходят друг в друга при поворотах этих фигур на 90° градусов и 72° градуса соответственно.

Чуть более сложная ситуация имеется у нас с перечислением триангуляций правильных шестиугольников (рис.4,c). Шесть первых триангуляций, показанных на рис.4,c, отличаются друг от друга лишь тем, в какой из шести вершин сходятся образующие эти триангуляции треугольники, так что мы их можем не различать. Не различать мы можем и две следующие триангуляции, которые переходят друг в друга при поворотах на 60°. Наконец, шесть оставшихся триангуляций можно разбить на два класса по три триангуляции, переходящие друг в друга при поворотах на 120°. Иными словами, с точностью до поворотов вокруг центра симметрии правильного шестиугольника у нас существует всего четыре принципиально отличающихся друг от друга триангуляции этой фигуры, изображенные на рис. 5.

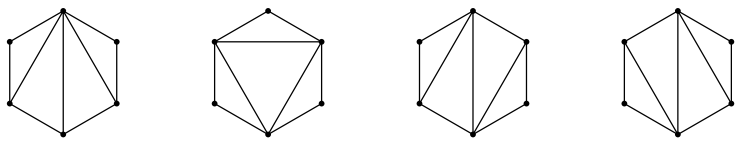


Рис. 5: Триангуляции непомеченного шестиугольника

Теперь можно заметить, что и это количество мы можем уменьшить. Действительно, две последние триангуляции переходят друг в друга при отражении вокруг любой из шести осей симметрии правильного шестиугольника. С формальной точки зрения это означает, что с точ-

ностью до поворотов и отражений у нас остается всего лишь три принципиально различные триангуляции правильного шестиугольника.

9.1.2. Пример с триангуляциями правильного $(n+2)$-угольника показывает нам, что любой непомеченный объект представляет собой, по сути, некоторое подмножество помеченных объектов, переходящих в себя под действием той или иной группы G. При этом количество объектов в каждом подмножестве, а следовательно, и количество таких подмножеств, существенным образом зависит от того, какую именно группу G мы рассматриваем.

Так, если мы возьмем в качестве G группу C_6 вращений этого шестиугольника относительно центра его симметрии, то мы получим четыре различных триангуляции. Если же мы в качестве такой группы выберем полную группу D_6 симметрий правильного шестиугольника, то у нас останется всего лишь три различные триангуляции.

9.2. Итак, подводя итоги, мы можем сказать, что любой непомеченный объект представляет собой некоторый класс эквивалентности на множестве X всех помеченных объектов данного типа. При этом само отношение эквивалентности на этом множестве задается действием группы G на X. Все, что нам осталось — это дать строгое формальное определение действия группы G на множестве X.

9.2.1. Напомним вначале определение самой группы G.

Определение 9.1. Группой G называется множество с введенной на ней бинарной операцией $'\cdot'$, удовлетворяющей следующим трем аксиомам (аксиомам группы):

1. Ассоциативность операции $'\cdot'$: для любых трех элементов $f, g, h \in G$
$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h.$$
2. Наличие нейтрального элемента $e \in G$, то есть такого элемента группы, для которого
$$g \cdot e = e \cdot g = g \qquad \text{для любого} \quad g \in G.$$
3. Наличие обратного элемента: для любого $g \in G$ существует элемент $g^{-1} \in G$, такой, что
$$g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e.$$

9.2.2. Рассмотрим теперь некоторое множество X — например, множество всех помеченных простых связных графов, построенных на n вершинах, множество всех помеченных триангуляций правильного $(n+2)$-угольника, и так далее. Пусть у нас также имеется некоторая группа G с бинарной операцией $'\cdot'$, например, циклическая группа C_{n+2} вращений правильного $(n+2)$-угольника.

Определение 9.2. (Левым) действием группы G на множестве X называется бинарный оператор
$$\circ : \qquad G \times X \longrightarrow X,$$
однозначно сопоставляющий любому элементу g группы G и произвольному элементу x множества X некоторый элемент y этого множества X и удовлетворяющий следующим двум аксиомам:

1. Ассоциативность:
$$(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \qquad \forall\, g, h \in G, \quad x \in X.$$

2. Тождественность:
$$e \circ x = x \qquad \forall\, x \in X,$$
где e — нейтральный элемент группы G.

Замечание 9.3. Из определения действия группы G на множестве X следует, что при любом фиксированном $g \in G$ оператор $\circ$ задает биективное отображение $\circ_g : X \to X$ множества X в себя, сопоставляющее любому $x \in X$ единственный элемент $y \in X$, равный $y = g \circ x$. Биективность этого отображения следует хотя бы из того, что для любого такого отображения, задаваемого $g \in G$, существует единственное обратное ему отображение, задаваемое обратным к g в группе G элементом g^{-1} и сопоставляющее любому $y \in X$ элемент $g^{-1} \circ y = x$.

Любое же биективное отображение конечного множества в себя можно трактовать как некоторую перестановку σ_g множества X, т.е. как некоторый элемент симметрической группы S_n, $n = |X|$, всех перестановок этого n-элементного множества X. Поэтому любое действие группы G на множестве X задает нам некоторый гомоморфизм группы G в некоторую подгруппу Σ_G симметрической группы S_n, $n = |X|$. Образ Σ_G этого гомоморфизма часто называют *группой перестановок* множества X.

9.2.3. Рассмотрим некоторые характерные примеры действий группы G на множестве X.

Пример 9.4. Тривиальное действие: для любого $x \in X$ и любого $g \in G$
$$g \circ x = x.$$
Такое действие задает гомоморфизм группы G в тривиальную подгруппу $\Sigma_G = \{\mathrm{id}\}$ симметрической группы S_n, $n = |X|$, состоящую из единственного элемента — тождественной перестановки id. Отсюда, в частности, следует, что различные элементы $g \in G$ в общем случае не обязаны соответствовать *различным* перестановкам σ_g множества X. Иными словами, в общем случае это действительно гомоморфизм, а не изоморфизм группы G в группу Σ_G перестановок множества X. Впрочем, это, скорее, исключение, чем правило — обычно действие G на X вводят так, чтобы группы G и Σ_G были изоморфны друг другу.

Пример 9.5. Действия группы G на самой себе:

(1) : левое действие: $\quad g \circ x = g \cdot x \qquad \forall\, g \in G, \quad \forall\, x \in G;$

(2) : действие сопряжением: $\quad g \circ x = g \cdot x \cdot g^{-1} \qquad \forall\, g \in G, \quad \forall\, x \in G.$

Пример 9.6. Если мы рассматриваем какой-то геометрический объект Γ, то в качестве G, как правило, выступает некоторая группа движений евклидова пространства, переводящих объект Γ в себя. Например, рассмотренная в примерах группа C_n вращений правильного триангулированного $(n+2)$-угольника действует на множестве X_v вершин, множестве X_e ребер и множестве X_f граней этого многогранника.

9.2.4. Оказывается, любое действие G на X порождает на этом множестве X отношение эквивалентности следующим образом:
$$x \sim y, \qquad \text{если} \quad \exists\, g \in G : \quad g \circ x = y.$$

Проверим, что введенное таким образом отношение удовлетворяет всем необходимым аксиомам.

1. *Рефлексивность:* $x \sim x$ для любого $x \in X$, так как для любого $x \in X$ существует $e \in G$ — нейтральный элемент группы, такой, что $e \circ x = x$.

2. *Симметричность:* если $x \sim y$, т.е. существует $g \in G$, такой, что $g \circ x = y$, то и $y \sim x$, так как существует $h \in G$, $h = g^{-1}$, такой, что $h \circ y = x$.

3. *Транзитивность:* если $x \sim y$, т.е. существует $g \in G : \ g \circ x = y$, и если $y \sim z$, т.е. существует $h \in G : \ h \circ y = z$, то, очевидно, существует и элемент $h \cdot g \in G : \ (h \cdot g) \circ x = z$, т.е. $x \sim z$.

Как следствие, множество X с помощью этого отношения разбивается на попарно непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности, которые в случае действия G на X имеют специальное название — они называются орбитами элементов множества X.

Определение 9.7. Орбитой элемента $x \in X$ под действием группы G называется подмножество

$$Gx := \{g \circ x \in X \mid g \in G\} \ \subseteq \ X$$

всех образов этого элемента под действием группы G. Соответствующее фактор-множество, т.е. множество всех таких орбит Gx, обозначается обычно X/G.

9.2.5. Теперь мы вновь можем вернуться к понятию непомеченного объекта. Пусть X есть n-элементное множество помеченных объектов, а G есть некоторая группа, действующая на элементах этого множества. Действие группы G на X разбивает все множество помеченных объектов на классы эквивалентности — орбиты элементов $x \in X$ под действием группы G. Любой такой класс эквивалентности мы и будем называть непомеченным объектом.

9.3. С точки зрения комбинаторики интерес представляет поиск числа орбит, т.е. нахождение мощности описанного выше фактор-множества X/G. В простейших случаях это делается довольно легко.

9.3.1. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9.8 (задача о хороводе)**.** Шесть девушек водят хоровод. Сколько существует способов его организовать?

Решение. Если бы девушки стояли неподвижно, то тогда существовало бы 6! различных способов расставить их по местам на окружности. Иными словами, в этом примере множество X совпадает с множеством всех перестановок шести различных элементов.

Но девушки в хороводе ходят по кругу, поэтому абсолютное расположение девушек в пространстве для нас не существенно. Важно лишь их взаимное расположение друг относительно друга. Как следствие, любые начальные расположения девушек, переходящие в себя при вращениях, следует считать эквивалентными, т.е. не различать.

С формальной точки зрения это означает, что на множестве $X = S_6$ всех перестановок шести элементов действует циклическая группа $G = C_6$ — группа вращений. Нас же интересует количество орбит элементов множества X под действием группы G, т.е. мощность фактор-множества X/G.

Упрощающим фактом в данном примере является то, что количество элементов в любой орбите является одинаковым и равным порядку $|G|$ группы, т.е. шести. Действительно, любой

начальной расстановке девушек в хороводе можно сопоставить некоторую перестановку шести различных чисел вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix}.$$

В результате действия группы $G = C_6$ мы из любой такой перестановки получаем следующие шесть отличных друг от друга перестановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_1 \end{pmatrix} \neq \ldots \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ i_6 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому порядок $|Gx| = 6$ для любого элемента $x \in X$, и мы имеем следующую простую формулу для подсчета количества всех орбит:

$$|X/G| = \frac{|X|}{|Gx|} = \frac{6!}{6} = 5! = 120.$$

□

9.3.2. Иногда рассмотренную в примере 9.8 задачу формулируют как задачу об ожерелье. Ожерельем называется украшение, состоящее из n драгоценных камней и имеющее две стороны — лицевую и изнаночную. В задаче требуется найти количество ожерелий, состоящих из шести различных драгоценных камней.

Наряду с этой задачей часто рассматривают и так называемую задачу о браслете. Браслет, как и ожерелье, состоит из n камней, однако, в отличие от ожерелья, две его стороны — лицевая и изнаночная — никак не отличаются друг от друга.

Пример 9.9 (задача о браслете)**.** Сколько существует различных браслетов, состоящих из шести камней шести различных цветов?

Решение. Отличие данной задачи от задачи об ожерелье состоит в том, что браслет мы можем переворачивать, а ожерелье нет. Как следствие, в задаче о браслете на множестве $X = S_6$ действует группа $G = D_6$ симметрий правильного шестиугольника, $|G| = 12$. Так как все остальные рассуждения предыдущего примера остаются в силе, то количество различных браслетов рассчитывается по формуле

$$|X/G| = \frac{|X|}{|Gx|} = \frac{6!}{12} = 60.$$

□

9.3.3. Возьмем теперь два одинаковых кубика, как-то раскрасим грани каждого из них, положим кубики в мешок и в этом мешке их перемешаем. Если в результате этих операций мы не сможем отличить один кубик от другого, то говорят, что способы их раскраски геометрически одинаковы.

Пример 9.10 (задача о раскраске граней куба)**.** Сколько существует геометрически различных способов раскраски шести граней куба в шесть различных цветов?

Решение. Как и в двух предыдущих примерах, множеству X раскраски шести граней кубика в шесть различных цветов можно взаимно-однозначно сопоставить множество S_6 всех перестановок шести элементов. Но теперь на этом множестве действует группа G симметрий куба.

Далее, как и в примерах 9.8 и 9.9, и ровно по тем же самым соображениям, количество элементов в любой орбите одинаково и равно порядку $|G|$ группы. Однако в данном случае легче даже сосчитать не порядок группы, а количество элементов в любой орбите.

Действительно, любую грань, окрашенную в один из шести цветов, можно либо оставить на месте, либо перевести в любую из оставшихся пяти граней. Всего имеем, таким образом, шесть различных вариантов. При этом для любого из этих вариантов существует четыре различных способа окраски граней, прилегающих к данной. Эти способы получаются друг из друга поворотами относительно оси, проходящей через центр выбранной грани и центр грани, ей противоположной. Итого количество элементов в орбите любого элемента x равно $|Gx| = 6 \cdot 4 = 24$, и поэтому $|X/G| = 6!/24 = 30$. $\square$

9.4. Во всех разобранных выше примерах количество элементов $x \in X$, принадлежащих любой орбите Gx, было одинаково и равно порядку $|G|$ группы G. Однако это скорее исключение, чем правило: в большинстве содержательных перечислительных задач количество элементов в различных орбитах различно.

9.4.1. Начнем со следующего простейшего примера.

Пример 9.11. Найти количество геометрически различных способов раскраски вершин правильного треугольника в не более чем два цвета.

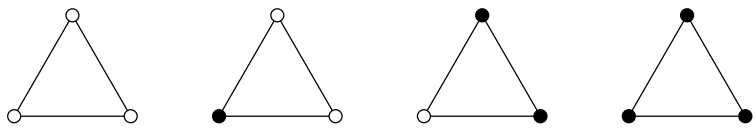


Рис. 6: Раскраски вершин треугольника

Решение. Перебрав вручную все варианты, несложно убедиться, что всего существует 4 геометрически различные способы окраски вершин треугольника (рис.6). Проверим, получится ли это число с использованием описанного в примерах 9.8–9.10 подхода.

В рассматриваемом примере в качестве множества X выступает множество правильных треугольников с помеченными и окрашенными вершинами. Любая из трех вершин может быть независимо от двух других вершин покрашена либо в черный, либо в белый цвет. Поэтому всего существует 2^3 способов окраски этих вершин. Как следствие, мощность $|X|$ множества X равна 8. На этом множестве X действует группа D_3 симметрий правильного треугольника, порядок которой равен шести. Видно, что 8 на 6 нацело не делится. Уже из этого обстоятельства следует, что подход, описанный в примерах 9.8–9.10, здесь не проходит.

Причина нашей неудачи как раз и заключается в том, что в рассматриваемой задаче количество элементов в разных орбитах различно и отличается от порядка группы D_3. Действительно, пусть элементу $x_1 \in X$ соответствует треугольник, все помеченные вершины которого окрашены в белый цвет. Очевидно, что для такого элемента

$$g \circ x_1 = x_1 \qquad\qquad \forall\, g \in G.$$

Как следствие, мощность орбиты этого элемента равна единице. Тот же результат справедлив и для элемента $x_8 \in X$, отвечающего окраске всех трех вершин в черный цвет.

Оставшееся подмножество способов окраски вершин треугольника разбивается под действием группы G на две орбиты, мощность каждой из которых равна трем. Действительно, пусть

элементам x_2, x_3 и x_4 отвечают три способа окраски вершин треугольника в два цвета, при которых одна из трех вершин окрашена в белый, а две других — в черный цвет. Несложно убедиться в том, что под действием различных элементов группы G эти элементы переходят друг в друга. Тот же результат справедлив и для элементов x_5, x_6, x_7 множества X, отвечающих двум белым вершинам и одной черной. □

9.4.2. Вернемся к подсчету количества всех триангуляций правильных $(n+2)$-угольников. В этой задаче в качестве X выступает множество всех возможных триангуляций правильных $(n+2)$-угольников с помеченными вершинами. На этом множестве может действовать либо группа C_{n+2} вращений, либо группа D_{n+2} симметрий правильного $(n+2)$-угольника. Задача состоит в подсчете количества $|X/G|$ орбит элементов множества X под действием группы G, $G = C_{n+2}$ или $G = D_{n+2}$.

Рассмотрим вначале триангуляции правильного пятиугольника ($n = 3$). Для таких триангуляций количество элементов в орбите равно $(n+2) = 5$ и совпадает с количеством элементов в множестве X как в случае действия группы $C_{n+2} = C_5$ вращений правильного пятиугольника, так и в случае действия полной группы $D_{n+2} = D_5$ симметрий правильного пятиугольника. Как следствие, количество триангуляций пятиугольника с непомеченными вершинами равно $5/5 = 1$.

Однако уже в случае $n = 4$ (триангуляции правильного шестиугольника) ситуация значительно сложнее. В этом случае под действием группы $C_{n+2} = C_6$ вращений все множество X таких триангуляций разбивается на четыре орбиты, только в одной из которых количество элементов совпадает с порядком группы и равно шести. В двух других количество элементов равняется трем, а в последней это количество равно двум. Под действием полной группы $D_{n+2} = D_6$ симметрий правильного шестиугольника то же самое множество X разбивается на три орбиты, количество элементов в которых равняется $|Gx_1| = |Gx_2| = 6$, $|Gx_3| = 2$.

Дальнейшие рассуждения, приводящие к решению этой задачи при произвольном значении параметра n, можно посмотреть в упражнении **??** к данному параграфу.

9.4.3. Давайте разберемся с причиной, по которой в некоторых случаях количество элементов в той или иной орбите различно. Начнем с примера о хороводе. В этом примере каждый из элементов множества X максимальным образом несимметричен — девушки все различны, отличаются ростом, весом, возрастом, цветом волос. Поэтому под действием любого элемента группы $G = C_n$, отличного от единичного элемента e, хоровод сам в себя перейти не может.

Иная ситуация имеет место в случае треугольника, вершины которого могут быть окрашены не более чем в два цвета. Треугольник, все вершины которого окрашены в один и тот же цвет, максимальным образом симметричен — любой элемент группы переводит такой треугольник в себя. Как следствие, в орбите этого элемента x_1 сидит только сам элемент x_1. Треугольник, две вершины которого окрашены в белый цвет, а одна — в черный цвет, не обладает столь высокой степенью симметрии. Действительно, существуют элементы группы D_3, который переводят этот треугольник в один из двух оставшихся треугольников, вершины которого окрашены аналогичным образом. С другой стороны, имеются и элементы g группы D_3, отличные от единичного элемента e, которые переводят этот треугольник в себя. Как следствие, мощность орбиты этого треугольника под действием группы D_3 отлична и от единицы, и от порядка группы G.

Итак, основной причиной того, что в некоторых случаях количество элементов в Gx отличается от $|G|$, заключается в том, что элемент $x \in X$ обладает какой-то внутренней симметрией. Наличие таких элементов в X приводит, в частности, к тому, что количество элементов в различных

орбитах различно, а само количество орбит уже не может быть рассчитано как $|X|/|G|$ — в этом случае это число лежит в диапазоне

$$\frac{|X|}{|G|} < |X/G| \leqslant |X|.$$

Как следствие, в этом случае задача подсчета количества орбит становится значительно менее тривиальной. В следующем параграфе мы покажем, как можно решение этой задачи упростить.

10 Лемма Бернсайда

10.1. В предыдущем параграфе мы выяснили, что с формальной точки зрения любой непомеченный объект представляет собой некоторый класс эквивалентности на множестве X всех помеченных объектов данного типа. Отношение же эквивалентности на этом множестве вводится с помощью действия некоторой группы G на множестве X. В результате такого действия все множество X разбивается на классы эквивалентности — орбиты G/X. Задача перечисления непомеченных объектов, таким образом, эквивалентна задаче подсчета количества $|G/X|$ всех таких орбит.

Вообще говоря, подсчет количества орбит сводится к перебору элементов в каждой из таких орбит. Теория групп предлагает еще один, иногда более удобный с практической точки зрения способ определения числа $|G/X|$, опирающийся на так называемую лемму Бернсайда. Для того, чтобы эту лемму сформулировать, нам понадобится ввести целый ряд дополнительных понятий теории групп.

10.1.1. Прежде всего, нам понадобится следующее полезное

Определение 10.1. Стабилизатором G_x элемента $x \in X$ называется подмножество элементов группы G, оставляющих x неподвижным:

$$G_x := \{g \in G \colon g \circ x = x\}.$$

По сути дела, стабилизатор G_x элемента x характеризует степень внутренней симметрии этого объекта. Если объект несимметричен (как хоровод, состоящий из различных девушек), стабилизатор состоит из одного единственного элемента — единичного элемента e группы G. Если же элемент обладает той или иной степенью внутренней симметрии, то мощность стабилизатора отлична от единицы. В случае, если объект x настолько симметричен, что любой элемент группы G переводит его в себя, то мощность стабилизатора совпадает с порядком группы G.

10.1.2. Важным свойством стабилизатора является тот факт, что это подмножество оказывается замкнутым относительно действия $' \cdot '$ в группе G. Иными словами, подмножество этих объектов образует *подгруппу* группы G. Действительно,

1. подмножество G_x, очевидно, не пусто — в него обязательно входит нейтральный элемент e группы G: $e \circ x = x$ для любого $x \in X$;

2. для любого $g \in G_x$ обратный ему элемент g^{-1} также принадлежит G_x:

$$\sqsupset \quad g \circ x = x \quad \Longrightarrow \quad (g^{-1} \cdot g) \circ x = g^{-1} \circ x \quad \Longleftrightarrow \quad x = g^{-1} \circ x;$$

3. наконец, если $g \in G_x$ и $h \in G_x$, то и их произведение $g \cdot h$ также принадлежит G_x:

$$(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) = g \circ x = x.$$

10.1.3. Тот факт, что G_x является подгруппой группы G для любого $x \in X$, позволяет нам построить очень полезное разбиение всех элементов группы G на блоки одинакового размера. Выберем для этого произвольный элемент g группы G, и умножим этот элемент на все элементы h нашей подгруппы $H \equiv G_x$. В результате мы получим подмножество

$$g \cdot H := \{g \cdot h \mid h \in H\}.$$

Перебирая разные элементы g группы G, мы получим целый набор подмножеств вида $g \cdot H$. Оказывается, что этот набор и задает нам разбиение группы G на блоки.

Именно, предположим, что у двух подмножеств $g_1 \cdot H$ и $g_2 \cdot H$, порожденных двумя различными элементами g_1 и g_2 группы G, имеется общий элемент $g \in G$. Это означает, что существуют элементы

$$h_1 \in H: \quad g = g_1 \cdot h_1, \qquad \text{и} \qquad h_2 \in H: \quad g = g_2 \cdot h_2.$$

Следовательно,

$$g_1 \cdot h_1 = g_2 \cdot h_2 \qquad \Longrightarrow \qquad g_1 = g_2 \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1}) \qquad \text{и} \qquad g_2 = g_1 \cdot (h_1 \cdot h_2^{-1}).$$

Но подгруппа H замкнута относительно действия в группе, так что $h_2 \cdot h_1^{-1} =: h_3 \in H$ и $h_2 \cdot \cdot h_1^{-1} =: h_4 \in H$, и поэтому $g_1 \in g_2 \cdot H$ и $g_2 \in g \cdot H$. Иными словами, любые два подмножества вида $g_1 \cdot H$ и $g_2 \cdot H$ либо не пересекаются между собой, либо совпадают.

Более того, пусть подгруппа H содержит k элементов $h_1 = e, h_2, \ldots, h_k$. Так как для любого $g \in G$ элементы

$$g \cdot h_i \neq g \cdot h_j \qquad \text{в случае, если} \qquad h_i \neq h_j,$$

то все элементы $g \cdot h_i$ подмножества

$$g \cdot H = \{g \cdot h_1, g \cdot h_2, \ldots, g \cdot h_k\}$$

отличны друг от друга. Как следствие, любой блок вида $g \cdot H$ для любого $g \in G$ содержит то же количество элементов, что и сама подгруппа H. Тем самым мы и доказали, что с помощью подгруппы H мы можем разбить группу G на блоки $g \cdot H$ одинакового размера.

Каждый такой блок $g \cdot H$ называется смежным классом G по H, а само множество таких блоков называется множеством смежных классов G по H и обозначается G/H. Так как количество элементов в каждом смежном классе одинаково и равно $|H|$, то количество элементов $|G|$ в группе связано с количеством $|G/H|$ смежных классов следующим полезным соотношением:

$$|G| = |H| \cdot |G/H|.$$

10.1.4. Вернемся к введенному выше понятию стабилизатора G_x элемента $x \in X$. Оказывается, имеется тесная связь между орбитами Gx и стабилизаторами G_x элемента $x \in X$. Именно, справедлива следующая

Теорема 10.2. *Для любого $x \in X$ имеется взаимно-однозначное соответствие между*

1. *множеством всех элементов орбиты элемента x, т.е. множеством*

$$Gx = \{y \in X \mid \exists\, g \in G : \ g \circ x = y\},$$

2. *и фактор-множеством G/G_x, т.е. множеством смежных классов G по стабилизатору G_x,*

при котором любой точке $y = g \circ x$ орбиты Gx отвечает некоторый смежный класс $g \cdot G_x$ (т.е. элемент фактор-множества G/G_x).

Доказательство. По сути, нам необходимо доказать очень простой факт, а именно, если g_1 и g_2 принадлежат одному и тому же смежному классу, то они переводят x в один и тот же элемент $y \in X$, и наоборот. А этот факт доказывается элементарно:

$$\sqsupset \quad g_2 \in g_1 \cdot G_x \quad \Longleftrightarrow \quad g_1^{-1} \cdot g_2 \in G_x \quad \Longleftrightarrow \quad (g_1^{-1} \cdot g_2) \circ x = x \quad \Longleftrightarrow \quad g_2 \circ x = g_1 \circ x =: y \in X.$$

По другому доказанный факт можно переформулировать следующим образом: различным точкам $y \in Gx$ орбиты отвечают различные смежные классы $g \cdot G_x$. □

Замечание 10.3. В частном случае, когда стабилизатор G_x состоит из единственного нейтрального элемента e (то есть в случае, когда элемент $x \in X$ не обладает никакой нетривиальной внутренней симметрией), имеет место взаимно-однозначное соответствие между всеми элементами орбиты Gx и всеми элементами группы G.

Следствие 10.4. *Имеет место следующее равенство:*

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \tag{52}$$

Доказательство. Действительно, мы выше показали, что для подгруппы $G_x \equiv H$ справедливо равенство вида

$$|G| = |G/H| \cdot |H| = |G/G_x| \cdot |G_x|.$$

Доказанная нами теорема 10.2 устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств G/G_x и Gx, из которого, в частности, следует равенство $|G/G_x| = |Gx|$. Следовательно, для любого $x \in X$ верно соотношение (52). □

Замечание 10.5. Еще раз обратим внимание на связь полученных выше формул с внутренней симметрией перечисляемых объектов. В случае, если объект внутренней симметрией не обладает, $G_x = \{e\}$, а орбита Gx максимальна и совпадает с порядком группы G, действующей на X. В случае, когда элемент x внутренней симметрией обладает, его стабилизатор G_x отличен от $\{e\}$, а количество элементов в его орбите меньше $|G|$. Иными словами, чем более симметричен объект, тем меньше элементов в его орбите и тем богаче его стабилизатор.

10.2. Теперь мы, наконец, готовы сформулировать и доказать лемму Бернсайда.

10.2.1. Зафиксируем некоторый элемент g группы G. Обозначим через X^g подмножество элементов множества X, остающихся неподвижными под действием этого $g \in G$:

$$X^g := \{x \in X : \ \mid g \circ x = x\}.$$

Лемма 10.6 (Бернсайд). *Количество орбит, т.е. мощность фактор-множества X/G, может быть рассчитано по формуле*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|. \tag{53}$$

Доказательство. Сосчитаем количество всех пар (g,x), $g\in G$, $x\in X$, таких, что $g\circ x = x$, т.е. мощность множества

$$\{(g,x)\in G\times X \mid g\circ x = x\}.$$

Сделать это можно двумя различными способами. В первом из них для любого фиксированного элемента g группы G подсчитаем количество $|X^g|$ элементов множества X, остающихся неподвижными под действием G. При таком способе подсчета количество искомых пар оказывается равным

$$|\{(g,x)\in G\times X \mid g\circ x = x\}| = \sum_{g\in G}|X^g|.$$

Теперь поступим наоборот, а именно, для любого фиксированного элемента x множества X сосчитаем количество элементов группы g, оставляющих этот элемент x неподвижным. Из определения стабилизатора G_x элемента $x\in X$ мы получаем, что в этом случае

$$|\{(g,x)\in G\times X \mid g\circ x = x\}| = \sum_{x\in X}|G_x|.$$

Воспользуемся теперь равенством (52). Согласно этому равенству, мощность стабилизатора G_x равна $|G_x| = |G|/|Gx|$, и поэтому

$$\sum_{g\in G}|X^g| = |G|\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|}.$$

Осталось доказать, что стоящая в правой части последнего равенства сумма равна $|X/G| =: k$. Мы знаем, что под действием группы G множество X разбивается на k попарно непересекающихся классов эквивалентности Gx_i, $i = 1,\dots,k$. Следовательно, мы можем так сгруппировать слагаемые в сумме $\sum_{x\in X} 1/|Gx|$, чтобы все входящие в i-ю группу слагаемые отвечали элементам x из одного и того же класса эквивалентности Gx_i:

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in Gx_i}\frac{1}{|Gx_i|}.$$

Теперь заметим, что при любом фиксированном i все слагаемые внутренней суммы одинаковы и равны $1/|Gx_i|$, а количество самих слагаемых совпадает с количеством элементов в i-м классе эквивалентности, то есть равно все тому же $|Gx_i|$:

$$\sum_{x\in Gx_i}\frac{1}{|Gx_i|} = \frac{1}{|Gx_i|}\sum_{x\in Gx_i}1 = \frac{|Gx_i|}{|Gx_i|} = 1.$$

Отсюда мы и получаем, что

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{|Gx|} = \sum_{i=1}^{k}1 = k = |X/G|.$$

□

Замечание 10.7. Очевидно, что нейтральный элемент e группы G оставляет неподвижным любой элемент множества X, и поэтому всегда $|X^e| = |X|$. Если любой другой элемент g группы G не оставляет на месте ни один элемент $x \in X$, то тогда для любого $g \in G$, $g \neq e$, мощность $|X^g| = 0$, и мы из (53) получаем знакомую нам формулу

$$|X/G| = \frac{|X|}{|G|}.$$

10.2.2. Практический смысл леммы Бернсайда состоит в следующем. Количество элементов в группе G, как правило, меньше количества элементов в множестве X, на котором эта группа действует. Поэтому на практике часто оказывается легче перебрать все элементы $g \in G$ и посмотреть, какие из элементов $x \in X$ остаются под действием этих элементов неподвижными, чем перебирать все $x \in X$ и считать для каждого такого x количество элементов в его орбите Gx.

Пример 10.8. Еще раз рассмотрим задачу о подсчете геометрически различных способов окраски вершин правильного треугольника, но на этот раз подсчитаем количество способов раскраски этих вершин в не более чем десять цветов.

Решение. Заметим сразу же, что в этой задаче имеется 10^3 способов окраски вершин треугольника в не более чем десять цветов. Иными словами, без использования леммы Бернсайда нам бы пришлось перебирать всю тысячу элементов множества X помеченных окрашенных объектов, и для каждого элемента $x \in X$ вычислять количество элементов в орбите Gx этого элемента под действием группы G.

Напротив, количество элементов в группе $G = D_3$ симметрий треугольника, действующей на множестве X помеченных объектов, невелико и равно шести. Поэтому в данной задаче легче воспользоваться леммой Бернсайда, то есть подсчитать количество X^g элементов множества X, остающихся неподвижными под действием фиксированного элемента g группы $G = D_3$.

Начнем с нейтрального элемента группы $g = e$. Под действием $e \in G$ любой элемент множества X остается неподвижным. Поэтому, $|X^e| = |X| = 10^3 = 1000$.

Элементы a и b группы, отвечающие вращениям треугольника вокруг его центра симметрии на углы в $120°$ и $240°$ соответственно, оставляют неподвижными только десять элементов множества X — раскраски, в которых все вершины треугольника окрашены в один цвет. Следовательно, мощности $|X^a|$ и $|X^b|$ для этих элементов группы равны 10.

Осталось рассмотреть вращения $c, d, f \in G$ треугольника вокруг осей l_i, проходящих через выбранную вершину i, $i = 1 \ldots 3$, треугольника и центр противоположной ей грани. При таких вращениях остаются неподвижными элементы множества X, соответствующие окраске вершины i в любой из двух цветов, а двух оставшихся вершин — в один общий цвет. Как следствие, мощности множеств X^c, X^d, X^f одинаковы и равны 10^2.

Теперь мы можем воспользоваться равенством (53) для подсчета искомого количества орбит:

$$|X/G| = \frac{1}{6}[10^3 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2] = \frac{1320}{6} = 220.$$

11 Цикловой индекс группы перестановок. Теория Редфилда-Пойа

11.1. Итак, при подсчете количества орбит удобно использовать лемму Бернсайда. Пойа и Редфилд заметили, что для некоторого важного класса задач этот подсчет можно упростить.

11.1.1. Именно, пусть у нас имеется некоторая геометрическая фигура Γ, и пусть $\widetilde{X}$ есть множество каких-то элементов фигуры Γ (например, множество вершин, или ребер, или граней этой фигуры). Рассмотрим задачу о подсчете количества геометрически различных способов окраски элементов $x \in \widetilde{X}$, $|\widetilde{X}| = n$, этой геометрической фигуры Γ в не более чем k цветов. Мы знаем, что для решения этой задачи нужно ввести множество X различных способов окраски помеченных элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ в не более чем в k цветов (мощность $|X|$ этого множества равна, очевидно, k^n), рассмотреть действие группы G симметрий геометрического объекта Γ на множестве X, а затем подсчитать количество $|X/G|$ орбит элементов X под действием группы G — либо непосредственно, либо с помощью леммы Бернсайда.

11.1.2. Заметим, однако, что та же самая группа G симметрий фигуры Γ действует и на значительно более узком множестве $\widetilde{X}$ *неокрашенных* элементов этой фигуры. Такое действие задает нам естественный гомоморфизм

$$\varphi\colon G \to S_n \tag{54}$$

группы G в симметрическую группу S_n, $n = |\widetilde{X}|$ всех перестановок n-множества. Образ Σ_G этого гомоморфизма называется обычно группой перестановок элементов множества $\widetilde{X}$. Так вот, оказывается, все, что нужно знать для решения исходной задачи подсчета количества $|X/G|$ орбит — это так называемый цикловой индекс Z_{Σ_G} группы перестановок множества $\widetilde{X}$.

11.2. Введем понятие циклового индекса произвольной подгруппы Σ группы S_n.

11.2.1. Напомним, что в предыдущей главе мы ввели цикловой индекс множества S_n всех перестановок n-элементного множества $[n]$

$$Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\widetilde{Z}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{1\cdot i_1+2\cdot i_2+\ldots+n\cdot i_n=n} x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$$

как коэффициент при z^n в разложении экспоненциальной производящей функции

$$C(z) = \exp\Big(x_1\frac{z^1}{1} + x_2\frac{z^2}{2} + \ldots + x_n\frac{z^n}{n} + \ldots\Big)$$

по степеням формальной переменной z:

$$C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{Z}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, z^n.$$

Мы вывели также как явные, так и рекуррентные формулы для вычисления цикловых индексов $Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а также объяснили их комбинаторный смысл.

Так, наличие слагаемого вида $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$ в выражении для $Z_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает, что в группе S_n имеется перестановка σ, которая раскладывается в произведение i_1 циклов единичной длины, i_2 циклов длины 2 и так далее.

Определение 11.1. Если перестановка σ представляется в виде произведения i_1 циклов единичной длины, i_2 циклов длины 2 и так далее, то говорят, что такая перестановка имеет цикловой тип $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

Таким образом, любое слагаемое вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ в цикловом индексе $\widetilde{Z}_n(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ определяет нам цикловой тип перестановки $\sigma \in S_n$. Числовой же коэффициент при мономе вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ показывает, сколько существует перестановок σ в симметрической группе S_n, имеющих заданный цикловой тип $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

11.2.2. Рассмотрим в качестве примера цикловой индекс группы S_n перестановок для случая $n = 3$. В главе 4 мы показали, что указанный цикловой индекс имеет вид

$$Z_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3!}[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3].$$

Комбинаторный смысл коэффициентов в этом выражении следующий: множество всех перестановок 3-элементного множества содержит тождественную перестановку $(1)(2)(3)$ (слагаемое x_1^3, отвечающее произведению трех циклов единичной длины), три перестановки $(1\,2)(3)$, $(1\,3)(2)$, $(2\,3)(1)$, представляющие собой произведение цикла длины два на цикл длины один (слагаемое $3x_1x_2$), а также две перестановки $(1\,2\,3)$ и $(1\,3\,2)$, состоящие из единственного цикла длины три (слагаемое $2x_3$).

11.2.3. Рассмотрим теперь произвольную подгруппу Σ симметрической группы S_n. По аналогии со всей группой, для подгруппы Σ также можно ввести цикловой индекс $Z_\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по формуле

$$Z_\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n},$$

где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ есть цикловой тип перестановки $\sigma \in \Sigma$. Комбинаторный смысл коэффициентов при мономах вида $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$ в этом выражении абсолютно тот же самый, что и в случае циклового индекса множества S_n всех перестановок n-элементного множества — эти коэффициенты показывают, сколько перестановок в Σ имеют один и тот же цикловой тип.

Так, например, цикловой индекс циклической подгруппы C_3 симметрической группы S_3 имеет вид

$$Z_{C_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}[x_1^3 + 2x_3].$$

Действительно, в эту подгруппу входят только единичная перестановка, чей цикловой тип равен $\{1, 0, 0\}$, а также две перестановки $(1\,2\,3)$ и $(1\,3\,2)$, цикловые типы которых имеют вид $\{0, 0, 1\}$.

11.3. Вернемся к задачам о раскраске элементов геометрических фигур и объясним, как использование циклового индекса группы Σ_G помогает в решении этих задач.

11.3.1. Выберем какой-то элемент σ_g группы перестановок Σ_G элементов множества $\widetilde{X}$. Согласно лемме Бернсайда, для подсчета количества орбит нам нужно при любом таком σ_g подсчитать количество способов окраски элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ, при которых окрашенная фигура переходит в себя под действием $g \in G$. Давайте поймем, как при этом должны быть окрашены элементы множества $\widetilde{X}$.

Рассмотрим, например, задачу о раскраске вершин квадрата Γ в не более чем два цвета. В этой задаче в качестве G выступает группа D_4 симметрий квадрата, в качестве $\widetilde{X}$ — множество $\{1, 2, 3, 4\}$ помеченных вершин этого квадрата. Пусть $g \in D_4$ есть вращение квадрата Γ на $180°$.

Образом этого элемента при гомоморфизме $D_4 \to S_4$ является перестановка множества вершин квадрата следующего вида: $\sigma_g = (1\,3)(2\,4)$.

Предположим теперь, что мы окрасили вершины 1 и 3 в разные цвета. Очевидно, что при таком способе окраски вершин квадрата окрашенная фигура Γ под действием g в себя не перейдет — в результате поворота изменится и цвет вершины 1, и цвет вершины 3. Для того, чтобы этого не произошло, необходимо, чтобы вершины 1 и 3 были окрашены в одинаковый цвет. Понятно, что аналогичное условие должно быть выполнено и для вершин, входящих во второй цикл — вершины 2 и 4 также должны быть окрашены в один и тот же цвет.

Заметим теперь, что первую пару вершин (вершины 1 и 3) мы можем окрасить в любой из двух цветов, и вторую пару вершин (вершины 2 и 4) мы также можем окрасить в любой из двух цветов вне зависимости от того, в какой цвет выкрашена первая пара вершин. Следовательно, существует $2 \cdot 2 = 4$ способа окраски вершин квадрата Γ, при которых окрашенный квадрат перейдет в себя в результате его поворота на $180°$. Все эти четыре способа изображены на рис.14.

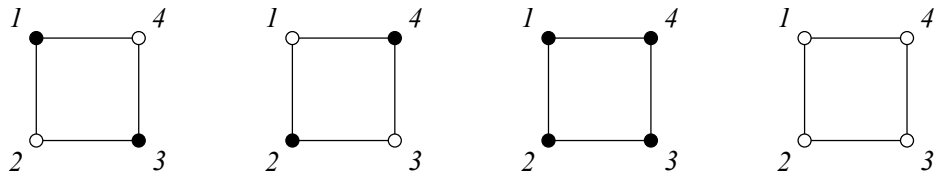


Рис. 7: Неподвижные точки для поворота на $180°$

Понятно теперь, что те же рассуждения справедливы и в общем случае. Пусть, например, под действием перестановки σ_g элемент $x_1 \in \widetilde{X}$ переходит в элемент $x_2 \in \widetilde{X}$. Если мы эти элементы окрасим в разные цвета, то в результате перестановки σ_g цвет вершины x_2 изменится, и окрашенная таким образом фигура Γ в себя не перейдет. Иными словами, для того, чтобы окрашенная фигура Γ перешла в себя под действием элемента $g \in G$, необходимо и достаточно, чтобы все элементы множества $\widetilde{X}$, входящие в один и тот же цикл перестановки $\sigma_g \in \Sigma_G$, были окрашены в один и тот же цвет.

Предположим теперь, что перестановка σ_g имеет цикловой тип $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Это, в частности, означает, что эта перестановка может быть представлена в виде произведения $m = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$ циклов. Каждый такой цикл независимо от других может быть окрашен в любой из k цветов. Следовательно, существует ровно k^m способов окраски элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ, при которых окрашенная фигура переходит в себя под действием элемента $g \in G$.

Общее же количество геометрически различных способов окраски элементов $x \in \widetilde{X}$ фигуры Γ в не более чем k цветов можно, согласно лемме Бернсайда, определить по формуле

$$|X/G| = \frac{1}{|\Sigma_G|} \sum_{\sigma_g \in \Sigma_G} k^{i_1 + \ldots + i_n},$$

где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ — цикловой тип перестановки σ_g.

Все, что теперь нам остается — это заметить, что полная информация о цикловом типе всех входящих в Σ_G перестановок содержится в цикловом индексе $Z_{\Sigma_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ группы Σ_G. С учетом этого обстоятельства мы можем окончательно сформулировать следующий результат.

Лемма 11.2 (Редфилд, Пойа)**.** *Количество орбит элементов множества X под действием группы G в задаче, связанной с раскраской элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ в не*

более чем k цветов, рассчитывается по формуле

$$|X/G| = Z_{\Sigma_G}(k,\dots,k) = \frac{1}{|\Sigma_G|}\sum_{\sigma_g\in\Sigma_G} k^{i_1+\dots+i_n}, \qquad n = |\widetilde{X}|, \tag{55}$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ — цикловой тип перестановки $\sigma_g \in \Sigma_G$.

11.3.2. В качестве примера дорешаем задачу о раскраске вершин квадрата. Несложно показать (см. Упражнение **??**), что цикловой индекс группы D_4 симметрии квадрата (а точнее, образа Σ_{D_4} этой группы при гомоморфизме $\varphi:\ D_4 \to\ S_4$) имеет вид

$$Z_{\Sigma_{D_4}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}[x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4]. \tag{56}$$

Следовательно, количество геометрически различных способов окраски вершин квадрата в не более чем 2 цвета равно

$$|X/D_4| = Z_{\Sigma_{D_4}}(2,2,2,2) = \frac{1}{8}[2^4 + 2\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2] = 6.$$

11.4. Лемма 11.2 была сформулирована Рэдфилдом [**?**] в 1927 году и, независимо от него, Пойа [**?**],[**?**] в 1937 году. Базируясь на этом замечательном результате, Рэдфилд и Пойа построили свою теорию перечисления непомеченных объектов. При этом работа Рэдфилда долгое время оставалась незамеченной, тогда как на работу Пойа сразу обратили внимание. Более того, Пойа очень удачно развил этот результат, подключив к этой науке теорию производящих функций. В результате теория перечисления Пойа стала одним из наиболее мощных инструментов современной перечислительной комбинаторики. К ее изучению мы и перейдем в следующих параграфах. Сейчас же мы опишем предложенный Пойа весьма полезный для этой теории способ формализации понятия раскраски элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ.

11.4.1. Итак, пусть имеется некоторая геометрическая фигура Γ, пусть $\widetilde{X}$ есть некоторое n-множество помеченных элементов этой фигуры Γ, и пусть Y есть некоторое k-множество цветов, в которые мы собираемся окрашивать элементы n-множества $\widetilde{X}$. Тогда любое отображение

$$f\colon \widetilde{X}\ \to\ Y$$

задает нам некоторую окраску элементов множества $\widetilde{X}$ цветами из множества Y.

Так, например, окраску вершин квадрата 1 и 3 в белый цвет, 2 и 4 — в черный цвет описывает функция вида $f(x_1) = f(x_3) = y_1$, $f(x_2) = f(x_4) = y_2$. Квадрату, все вершины которого окрашены в белый цвет, отвечает функция f, у которой $f(x_i) = y_1$ для всех $i = 1,\dots,4$.

При таком подходе множество X всех помеченных элементов фигуры Γ, окрашенных в не более чем k цветов, совпадает с множеством $Y^{\widetilde{X}}$ всех отображений $f : \widetilde{X} \to Y$.

11.4.2. Пусть теперь на множестве $\widetilde{X}$ задано некоторое действие $\circ$ группы G. Оказывается, что это действие индуцирует действие $\bullet$ группы G на множестве $Y^{\widetilde{X}}$. Именно, положим по определению

$$(g\bullet f)(x) := f(g^{-1}\circ x) \qquad \forall\, x\in\widetilde{X}. \tag{57}$$

Определенный таким образом оператор $\bullet$ удовлетворяет как свойству тождественности $e\bullet f = f \quad \forall\, f\in X$, так и свойству ассоциативности $g\bullet(h\bullet f) = (g\cdot h)\bullet f$. Действительно, для любого $x\in\widetilde{X}$ имеем

$$(e\bullet f)(x) \overset{\text{def}}{=} f(e^{-1}\circ x) = f(e\circ x) = f(x),$$

$g\bullet(h\bullet f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (h\bullet f)(g^{-1}\circ x) \stackrel{\text{def}}{=} f(h^{-1}\circ(g^{-1}\circ x)) = f((h^{-1}\cdot g^{-1})\circ x) = f((g\cdot h)^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} ((g\cdot h)\bullet f)(x).$

Замечание 11.3. Согласно определению (57), действие элемента $g \in G$ на функцию $f(x)$ эквивалентно действию не самого элемента g на аргумент x, а действию на x обратного к g элемента g^{-1} элемента группы G. Несмотря на кажущуюся сложность, такое определение действия довольно-таки естественно. Так, мы еще с курса элементарного математического анализа привыкли к тому, что если нам задана функция $y = f(x) = x^2$, то функция $f(x-a) = (x-a)^2$ аргумента, сдвинутого на a *влево,* есть сдвиг исходной функции $f(x) = x^2$ как целого на расстояние, равное a, *вправо.* И, кстати сказать, этот пример есть также пример действия — действия группы $G = T_a$ трансляций на некотором множестве функций $f(x)$.

11.4.3. Переформулируем теперь основной результат (55) теории Редфилда-Пойа на языке отображений $f : \widetilde{X} \to Y$.

В лемме Бернсайда нам необходимо сосчитать для каждого $g \in G$ количество элементов множества X, остающихся неподвижными под действием этого g. Элементы f множества $Y^{\widetilde{X}}$, остающиеся неподвижными под действием элемента $g \in G$ — это все отображения, у которых для любого $x \in \widetilde{X}$

$$(g \bullet f)(x) = f(g^{-1} \circ x) = f(x). \tag{58}$$

Равенство (58) выполняется для функции $f \in Y^{\widetilde{X}}$ тогда и только тогда, когда значения этой функции одинаковы на любом цикле перестановки $\sigma_{g^{-1}} = \sigma_g^{-1} \in \Sigma_G$. Отсюда, в частности, следует, что для заданного $g \in G$ количество таких функций равно $|Y|^m = k^m$, где m — количество циклов в перестановке σ_g^{-1}.

Учитывая теперь, что количество циклов и их тип у перестановок σ и σ^{-1} совпадают, а также то, что вся информация о цикловом типе перестановок группы Σ_G, в том числе и информация о количестве циклов таких перестановок, содержится в цикловом индексе

$$Z_{\Sigma_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|\Sigma_G|} \sum_{\sigma \in \Sigma_G} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

группы Σ_G, получаем окончательно следующий результат.

Лемма 11.4. *Количество отображений $f\colon \widetilde{X} \to Y$, описывающих геометрически различные способы окраски элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ цветами из множества Y, рассчитывается по формуле*

$$|Y^{\widetilde{X}}/G| = Z_{\Sigma_G}(k, \ldots, k) = \frac{1}{|\Sigma_G|} \sum_{\sigma_g \in \Sigma_G} k^{i_1 + \ldots + i_n}, \qquad k = |Y|, \quad n = |\widetilde{X}|, \tag{59}$$

$\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ — *цикловой тип перестановки $\sigma_g \in \Sigma_G$.*

11.5. В заключение данного параграфа рассмотрим чрезвычайно важное приложение описанных выше результатов — задачу подсчета всех непомеченных простых графов на n вершинах.

11.5.1. Рассмотрим вначале произвольный простой граф, построенный на n помеченных вершинах. Ранее мы говорили, что любой такой граф можно отождествлять с некоторым подмножеством множества, состоящего из всех $\binom{n}{2}$ пар помеченных вершин данного графа. Однако для решения задачи перечисления всех непомеченных простых графов нам понадобится еще

одно, не менее удобное описание простого графа, построенного на n помеченных вершинах. Именно, любой такой граф можно рассматривать как полный граф K_n, каждое ребро которого окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Первый вариант окраски ребра реализуется в том случае, если в исходном графе соответствующая пара вершин соединена ребром. В противном случае реализуется второй вариант окраски.

Такое описание позволяет нам для решения поставленной задачи воспользоваться теорией Редфилда-Пойа. Действительно, в роли геометрической фигуры Γ в данной задаче выступает полный граф K_n. Множество $\widetilde{X}$ его помеченных элементов есть множество всех $\binom{n}{2}$ пар помеченных вершин графа K_n. Множество Y цветов состоит в этом случае из двух элементов. Наконец, любой простой граф, построенный на n помеченных вершинах, отождествляется с одним из элементов множества X окрашенных ребер графа K_n.

Группой симметрий полного графа K_n является симметрическая группа S_n перестановок n помеченных вершин этого графа. Действие группы S_n на множестве X окрашенных ребер графа K_n разбивает это множество на классы эквивалентности — орбиты элементов множества X под действием группы S_n. Любая такая орбита представляет собой некоторый непомеченный граф. Задача перечисления всех непомеченных графов в такой постановке сводится к задаче подсчета количества $|X/S_n|$ орбит элементов множества X под действием группы S_n.

11.5.2. Как следует из леммы Редфилда-Пойа, для подсчета количества $|X/S_n|$ орбит нам необходимо описать действие группы S_n на $\binom{n}{2}$-элементном множестве $\widetilde{X}$ ребер полного графа K_n, а точнее, сосчитать цикловой индекс группы Σ_{S_n} перестановок этого множества $\widetilde{X}$. Покажем, как это делать, для нескольких конкретных значений параметра n.

11.5.3. В полном графе K_3 количество ребер совпадает с количеством вершин. Как следствие, группа Σ_{S_3} перестановок множества $\widetilde{X}$ ребер этого графа совпадает с симметрической группой S_3 перестановок множества вершин графа K_3. Поэтому

$$Z_{\Sigma_{S_3}}(x_1, x_2, x_3) = Z_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}[x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3],$$

а количество непомеченных графов на трех вершинах равно

$$Z_{\Sigma_{S_3}}(2, 2, 2) = Z_{S_3}(2, 2, 2) = \frac{1}{6}[2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2] = 4.$$

Все эти четыре графа показаны на рис 8.

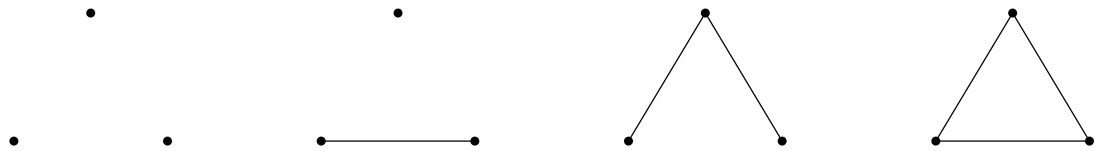


Рис. 8: Непомеченные графы на трёх вершинах

11.5.4. Опишем теперь действие группы S_n на множестве $\widetilde{X}$ ребер полного графа K_n в случае $n = 4$.

Нейтральный элемент группы S_4 оставляет все $\binom{4}{2} = 6$ ребер такого графа на месте. Поэтому цикловой тип образа этого элемента в группе Σ_{S_4} перестановок шести ребер графа K_4 равен $\{6, 0, 0, 0, 0, 0\}$ (слагаемое x_1^6 в цикловом индексе $Z_{\Sigma_{S_4}}$).

В группе S_4 имеется шесть перестановок $\sigma \in S_4$

$$(12)(3)(4), \qquad (13)(2)(4), \qquad (14)(2)(3), \qquad (23)(1)(4), \qquad (24)(1)(3), \qquad (34)(1)(2),$$

меняющих местами только две вершины графа. Любая такая перестановка оставляет на месте ребро, соединяющее эту пару вершин, а также ребро, соединяющее оставшуюся пару вершин. Оставшиеся четыре ребра полного графа K_4 разбиваются на пары, меняющиеся местами при такой перестановке вершин. Так, например, перестановка (12)(3)(4) оставляет на месте ребра (12) и (34). Ребро (13) под действием этой перестановки переходит в ребро (23), а ребро (23), наоборот, переходит на место ребра (13). Аналогичным образом меняются местами ребра (14) и (24). Как следствие, любая перестановка $\sigma \in S_4$ описанного вида приводит к появлению слагаемого $x_1^2 x_2^2$ в цикловом индексе группы Σ_{S_4}.

Заметим теперь, что ровно к тому же результату приводят и три перестановки вершин графа K_4 вида

$$(12)(34), \qquad (13)(24), \qquad (14)(23).$$

Действительно, в случае, например, перестановки (12)(34) на месте по-прежнему остаются ребра (12) и (34), ребра (13), (24) меняются местами друг с другом, и также ведет себя пара ребер (14), (23). Как следствие, всем этим перестановкам отвечают еще три слагаемых вида $x_1^2 x_2^2$ в цикловом индексе $Z_{\Sigma_{S_4}}$.

Восемь перестановок

$$(1)(234), \quad (1)(243), \quad (2)(134), \quad (2)(143), \quad (3)(124), \quad (3)(142), \quad (4)(123), \quad (4)(132)$$

вершин графа K_4 циклически переставляют как три ребра, соединяющие три вершины заданного цикла, так и три оставшихся ребра K_4. Например, в процессе перестановки (123)(4) ребро (12) переходит на место ребра (23), ребро (23) становится на место ребра (31), а ребро (31) — на место ребра (12). При этом оставшаяся тройка ребер также циклически переходит в себя: $(14) \to (24) \to (34) \to (14)$. Таким образом, действие каждой из описанных выше восьми перестановок приводит к появлению слагаемого x_3^2 в цикловом индексе $Z_{\Sigma_{S_4}}$.

Наконец, шесть перестановок

$$(1234), \qquad (1243), \qquad (1342), \qquad (1324), \qquad (1423), \qquad (1432)$$

вершин K_4 циклически переставляют четыре внешних ребра графа K_4, а также меняют местами два диагональных ребра. К примеру, действие перестановки (1234) приводит к следующим перестановкам множества $\widetilde{X}$ ребер графа K_4:

$$(12) \to (23) \to (34) \to (41) \to (12), \qquad\qquad (13) \to (24) \to (13).$$

Следовательно, в цикловом индексе $Z_{\Sigma_{S_4}}$ имеется слагаемое $6x_2^1 x_4^1$.

Таким образом, окончательно цикловой индекс группы Σ_{S_4} рассчитывается по формуле

$$Z_{\Sigma_{S_4}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24}[x_1^6 + 9x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2^1 x_4^1].$$

Подставляя в это выражение $x_i = 2$, мы получаем, что количество всех непомеченных графов на четырех вершинах равно

$$Z_{\Sigma_{S_4}}(2, 2, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{24}[2^6 + 9 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^1 \cdot 2^1] = 11.$$

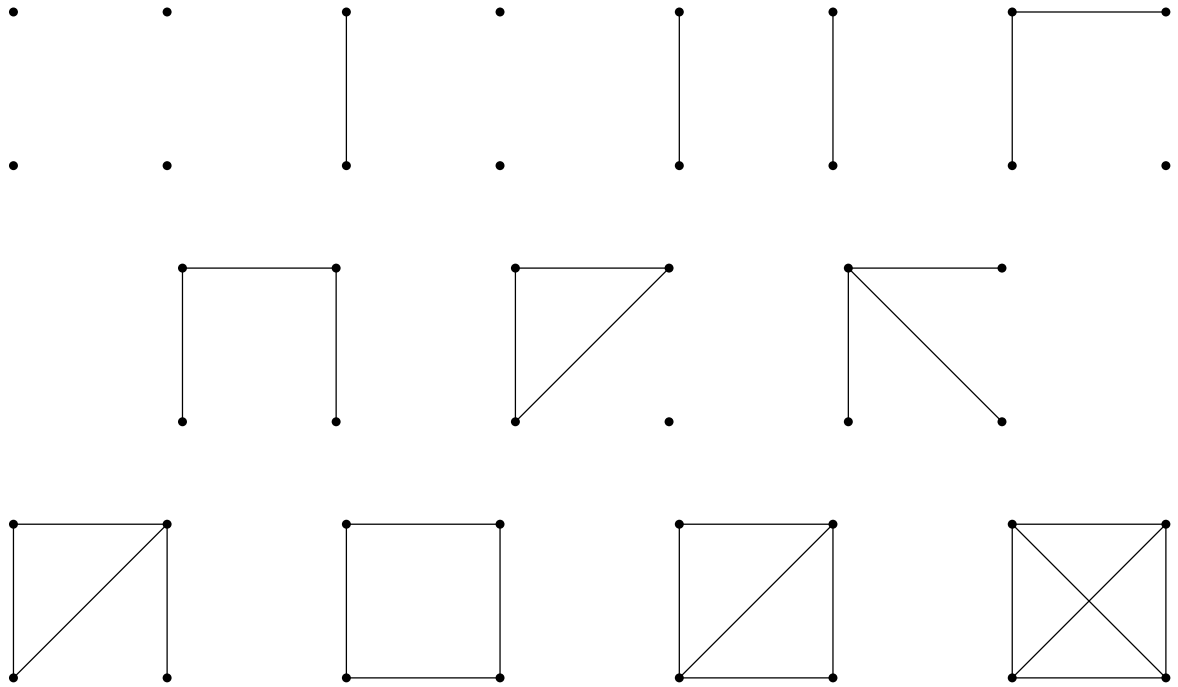


Рис. 9: Непомеченные графы на четырёх вершинах

Сами же эти графы показаны на рис. 9.

11.5.5. Аналогичные рассуждения позволяют, в принципе, получить формулу для циклового индекса $Z_{\Sigma_{S_n}}$ и для произвольного значения параметра n. Подробности этих рассуждений, равно как и саму формулу для $Z_{\Sigma_{S_n}}$, можно посмотреть, например, в книге [**?**].

12 Теория перечисления Пойа

12.1. В предыдущем параграфе мы показали, как, зная цикловой индекс группы Σ_G перестановок элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ, определить количество геометрически различных способов окраски этих элементов в не более чем k цветов. Заметим, однако, что часто нам хочется получить более подробную информацию о перечисляемых нами объектах.

12.1.1. Рассмотрим, например, задачу о раскраске вершин квадрата в не более чем два цвета. Мы знаем, что всего существует шесть геометрически различных способов такой раскраски (см.рис.10). Однако, как видно из рисунка, все это множество раскрашенных объектов естественным образом разбивается на пять блоков в зависимости от того, сколько вершин квадрата окрашено в белый цвет.

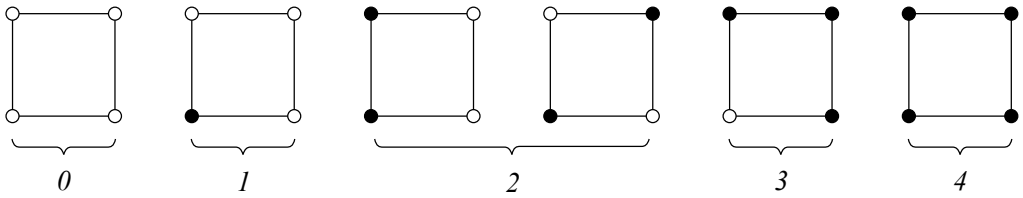


Рис. 10: Раскраски квадрата

Аналогично, в задаче о перечислении графов на n вершинах все множество таких графов естественным образом разбивается на блоки в зависимости от того, сколько ребер имеет тот или иной граф (рис.11).

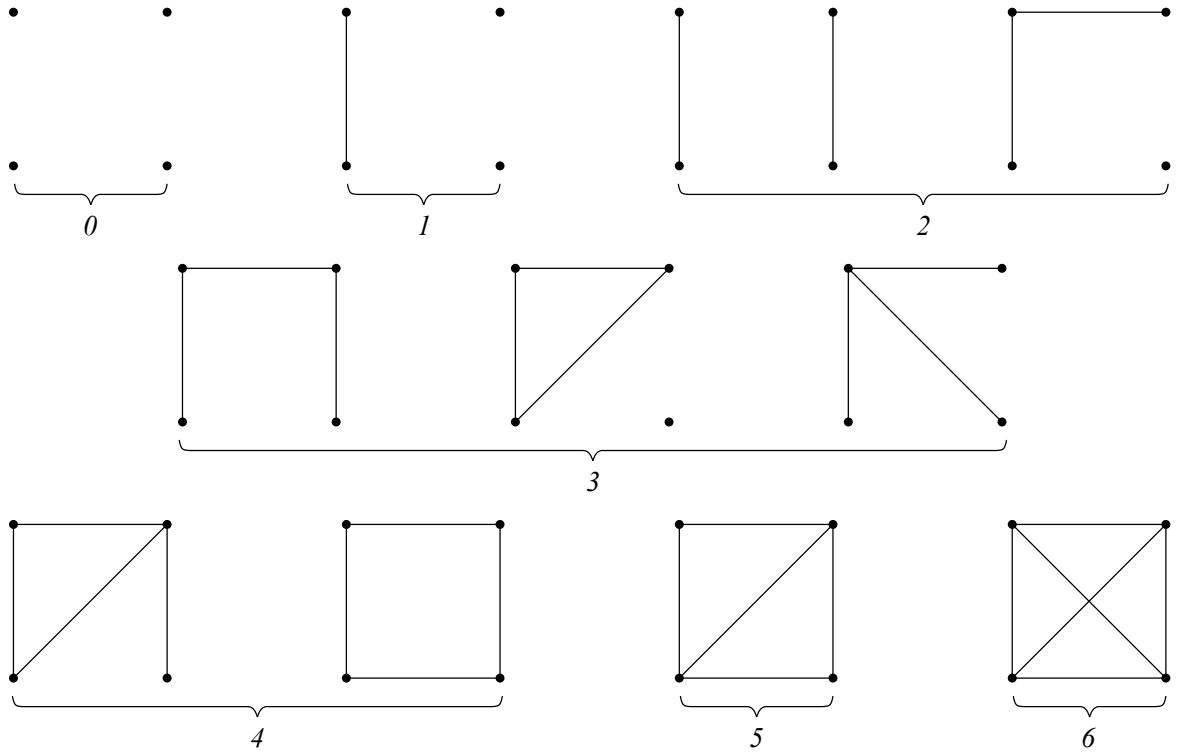


Рис. 11: Непомеченные графы на четырёх вершинах

12.1.2. Напомним, что ранее мы уже научились разбивать произвольное множество X на блоки X_k, рассматривая отображение

$$w \,:\, X \longrightarrow K$$

множества X в некоторое коммутативное кольцо K, при котором всем элементам x данного блока X_k сопоставляется одно и то же значение $w(x) = k$ (один и тот же вес k):

$$X = \bigcup_{k \in K} X_k, \qquad X_k := \{x \mid w(x) = k\}.$$

Самому множеству X при таком подходе мы в кольце K сопоставляли элемент

$$\varphi \equiv w(X) := \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{k \in K} c_k \cdot k, \qquad\qquad c_k = |w^{-1}(k)|,$$

называемый энумератором множества X. В частном случае отображения w вида

$$w : X \longrightarrow \mathbb{C}[[z]],$$

сопоставляющего любому элементу $x \in X$ формальный степенной ряд

$$w(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot z + \ldots + 0 \cdot z^{k-1} + 1 \cdot z^k + 0 \cdot z^{k+1} + \ldots = z^k,$$

мы получали в $\mathbb{C}[[z]]$ обыкновенную производящую функцию

$$\varphi(z) := \sum_{x \in X} w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты c_n которой определяют количество элементов множества X, имеющих заданный вес z^n.

12.1.3. С учетом вышесказанного вполне удовлетворительным способом подробного описания количества различных способов окраски вершин квадрата является построение производящей функции вида

$$\varphi(z) := 1 + z + 2z^2 + z^3 + z^4,$$

коэффициенты при z^i в которой дают нам количество геометрически различных способов окраски, при которых ровно i из n вершин окрашены в белый цвет. Общее же количество способов окраски при таком подходе получается подстановкой значения $z = 1$ в выражение для $\varphi(z)$.

Еще один способ описания разбиения множества всех раскрасок вершин квадрата на блоки состоит в построении энумератора этого множества вида

$$\varphi(b, w) = b^4 + wb^3 + 2w^2b^2 + w^3b + w^4,$$

коэффициенты при w^ib^{n-i} которого описывают количество геометрически различных способов окраски вершин квадрата, при которых i вершин окрашено в белый, а $(n - i)$ вершин — в черный цвет.

Основная задача данного параграфа — дать конструктивный способ построения такого рода энумераторов для общей задачи окраски элементов геометрической фигуры Γ в не более чем k цветов.

12.2. Начнем мы с несколько более простой задачи — с построения энумератора W множества X различных способов окраски помеченных элементов $x \in \widetilde{X}$ геометрической фигуры Γ в не более чем k цветов.

12.2.1. Напомним еще раз формальную постановку задачи. Пусть $\widetilde{X}$ есть n-множество элементов некоторой фигуры Γ, а Y есть k-множество цветов. Тогда любой элемент $f : \widetilde{X} \to Y$ множества $X \equiv Y^{\widetilde{X}}$ всех отображений $\widetilde{X}$ в Y задает нам некоторый способ окраски помеченных элементов фигуры Γ. Нам хочется каким-то разумным способом ввести энумератор множества $Y^{\widetilde{X}}$ всех таких отображений. Оказывается, что сделать это можно в два этапа.

12.2.2. На первом этапе мы построим энумератор множества Y цветов. Для этого, напомним, нам следует ввести отображение $w : Y \longrightarrow K$ множества Y в некоторое коммутативное кольцо K, сопоставляющее любому элементу $y \in Y$ его вес $w(y) \in K$. Суммируя все такие веса, мы получаем энумератор

$$\varphi \equiv w(Y) = \sum_{y \in Y} w(y) = \sum_{k \in K} c_k \cdot k \tag{60}$$

множества Y.

Например, в задаче о раскраске вершин квадрата мы можем рассмотреть отображение

$$w : Y = \{y_1, y_2\} \longrightarrow K = \{b, w\},$$

сопоставляющее различным элементам $y_i \in Y$ различные элементы кольца K:

$$w(y_1) = b, \qquad\qquad w(y_2) = w. \tag{61}$$

Такое отображение w дает нам для Y энумератор вида

$$\varphi(b, w) = b + w.$$

Рассматривая для той же задачи в качестве K кольцо $\mathbb{C}[[z]]$ формальных степенных рядов и полагая

$$w(y_1) = z^0 = 1, \qquad w(y_2) = z^1 = z, \tag{62}$$

мы получаем для множества Y цветов обыкновенную производящую функцию вида

$$\varphi(z) = 1 + z.$$

12.2.3. Определив вес любого элемента $y \in Y$, мы можем теперь перейти ко второму этапу — определению веса $W(f)$ произвольной функции $f : \widetilde{X} \to Y$, $f \in Y^{\widetilde{X}}$. Для этого, следуя подходу, изложенному в работе Николаса де Брейна [**?**], мы введем вес любого окрашенного элемента $x \in \widetilde{X}$ фигуры Γ как $w(f(x))$ и положим *по определению*

$$W(f) := \prod_{x \in \widetilde{X}} w(f(x)) \qquad \forall\ f \in Y^{\widetilde{X}}. \tag{63}$$

Иными словами, вес любой фигуры Γ, элементы $x \in \widetilde{X}$ которой окрашены в цвета из множества Y, равен произведению весов всех окрашенных элементов этой фигуры.

Покажем, что это определение корректно. Действительно, образ $f(x)$ любого элемента $x \in \widetilde{X}$ при отображении $f : \widetilde{X} \to Y$ представляет собой некоторый элемент y множества Y цветов, для которого корректно определен вес $w(y) = w(f(x)) \in K$. Так как элементы кольца мы можем не только складывать, но и перемножать друг с другом, то произведение всех таких образов для фиксированного отображения f представляет собой некоторый элемент кольца K. Следовательно, правило (63) корректно задает некоторое отображение W множества X всех функций $f : \widetilde{X} \to Y$ в кольцо K.

В качестве примера вновь рассмотрим задачу о раскраске вершин квадрата в не более чем два цвета. Предположим, что на множестве Y введен описанный в предыдущем пункте энумератор $\varphi(b, w) = b + w$, соответствующий отображению (61). Квадрату, все вершины которого окрашены в черный цвет, отвечает функция $f_1 : \widetilde{X} \to Y$ вида

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) = f_1(x_3) = f_1(x_4) = y_1.$$

Так как вес элемента y_1 равен $w(y_1) = b$, то, согласно формуле (63), вес функции f_1 равен

$$W(f_1) = \prod_{i=1}^{4} w(f_1(x_i)) = \prod_{i=1}^{4} w(y_1) = b^4.$$

Квадрату, у которого вершина 1 окрашена в белый цвет, а остальные три вершины — в черный цвет, соответствует функция

$$f_2 \in Y^{\widetilde{X}} : \qquad f_2(x_1) = y_2, \qquad f_2(x_2) = f_2(x_3) = f_2(x_4) = y_1.$$

Так как $w(y_2) = w$, а $w(y_1) = b$, то вес этой функции равен

$$W(f_2) = \prod_{i=1}^{4} w(f_1(x_i)) = w \cdot b^3.$$

В случае, когда энумератор множества Y задан равенствами (62), веса описанных выше функций f_1 и f_2, очевидно, равны

$$W(f_1) = 1, \qquad W(f_2) = z.$$

12.2.4. Определив вес каждой функции $f : \widetilde{X} \to Y$, мы легко можем построить энумератор всего множества $X = Y^{\widetilde{X}}$. Действительно, по определению, энумератор любого множества есть сумма весов всех его элементов. Суммируя $W(f)$ по всем возможным функциям f, мы получаем для $Y^{\widetilde{X}}$ энумератор вида

$$\Phi \equiv W(Y^{\widetilde{X}}) = \sum_{f \in Y^{\widetilde{X}}} W(f).$$

Так, в задаче о раскраске вершин квадрата в случае, когда энумератор множества Y цветов задан формулами (61), соответствующий ему энумератор множества $Y^{\widetilde{X}}$ всех отображений $f : Y \to \widetilde{X}$ имеет вид

$$\Phi(b, w) = b^4 + 4b^3w + 6b^2w^2 + 4bw^3 + w^4,$$

а в случае, когда в качестве энумератора Y выступает обыкновенная производящая функция $\varphi(z) = 1+z$, соответствующий ей энумератор множества $Y^{\widetilde{X}}$ представляет собой обыкновенную производящую функцию вида

$$\Phi(z) = 1 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 1.$$

12.2.5. Заметим теперь, что в обоих примерах энумераторы множества X можно свернуть, записав их в виде

$$\Phi(b, w) = (b + w)^4 = [\varphi(b, w)]^4 \qquad \text{и} \qquad \Phi(z) = (1 + z)^4 = [\varphi(z)]^4.$$

Учитывая, что степень 4 в этой задаче есть мощность множества $\widetilde{X}$, мы приходим к предположению о том, что и в общем случае энумератор $W(X)$ множества $X = Y^{\widetilde{X}}$ выражается через энумератор $W(Y)$ множества Y по формуле

$$W(Y^{\widetilde{X}}) = [W(Y)]^{|\widetilde{X}|}. \tag{64}$$

Оказывается, это предположение верно. Именно, справедлива

Теорема 12.1. *Пусть $W(Y)$ есть некоторый энумератор множества Y цветов, и пусть вес $W(f)$ произвольной функции $f : \widetilde{X} \to Y$, описывающей некоторую раскраску элементов множества $\widetilde{X}$ в цвета из множества Y, рассчитывается по формуле (63). Тогда энумератор $W(Y^{\widetilde{X}})$ множества $Y^{\widetilde{X}}$ всех функций f выражается через энумератор $W(Y)$ множества Y цветов по формуле (64).*

Доказательство. Распишем правую часть равенства (64) в следующем виде:

$$[W(Y)]^{|\widetilde{X}|} = \underbrace{[w(y_1) + \ldots + w(y_k)] \cdot [w(y_1) + \ldots + w(y_k)] \cdot \ldots \cdot [w(y_1) + \ldots + w(y_k)]}_{n \text{ сомножителей}}. \tag{65}$$

При перемножении этих n скобок мы получаем k^n слагаемых. Заметим теперь, что это количество совпадает с числом всевозможных функций $f : \widetilde{X} \to Y$. Этот факт позволяет нам установить взаимно-однозначное соответствие между k^n слагаемыми, получаемыми при перемножении n скобок в правой части (65), и всеми функциями f, описывающими различные способы окраски элементов множества $\widetilde{X}$ в цвета из множества Y.

Сделать это можно, например, следующим образом. Сопоставим первой скобке в правой части (65) элемент $x_1 \in \widetilde{X}$, второй скобке — элемент $x_2 \in \widetilde{X}$, и так далее. Иными словами, будем

считать, что все элементы y_i в первой скобке есть образы элемента $x_1 \in \widetilde{X}$, все элементы y_i во второй скобке есть образы элемента $x_2 \in \widetilde{X}$, и так далее. В этом случае, выбирая какое-то слагаемое $w(y_i)$ из первой скобки, какое-то слагаемое $w(y_j)$ из второй скобки и так далее, мы тем самым задаем некоторую функцию $f : \widetilde{X} \to Y$, которая на элементе x_1 принимает значение $f(x_1) = y_i$, на элементе x_2 принимает значение $f(x_2) = y_2$ и так далее. Причем этой функции f в результате перемножения скобок в правой части (65) отвечает выражение вида

$$\prod_{x \in \widetilde{X}} w(f(x)),$$

то есть, по определению, вес $W(f)$ этой функции.

Всего в результате перемножения скобок получаем k^n таких слагаемых, каждое из которых описывает вес $W(f)$ одной из k^n функций $f : \widetilde{X} \to Y$. Следовательно, стоящее в правой части (65) выражение равно

$$\sum_{f \in Y^{\widetilde{X}}} W(f),$$

то есть, по определению, представляет собой энумератор множества $Y^{\widetilde{X}}$. □

12.3. Теперь предположим, что на множестве $\widetilde{X}$ элементов геометрической фигуры Г действует группа G, то есть задан бинарный оператор $\circ : G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$. Это действие, как мы знаем, индуцирует действие $\bullet$ на множестве $Y^{\widetilde{X}}$ всех функций $f : \widetilde{X} \to Y$ по формуле

$$(g \bullet f)(x) := f(g^{-1} \circ x).$$

Действие $\bullet$ вводит на множестве всех функций отношение эквивалентности, разбивающее все множество $Y^{\widetilde{X}}$ на классы эквивалентности — орбиты элементов $Y^{\widetilde{X}}$ под действием группы G. Наша задача — построить энумератор $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$ этого множества $Y^{\widetilde{X}}/G$ орбит.

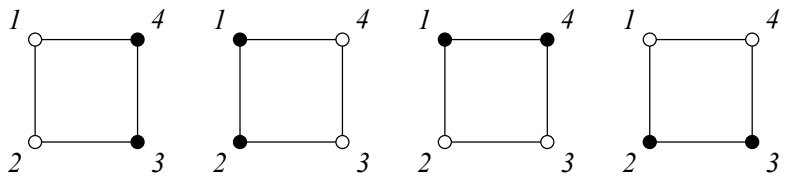


Рис. 12: Раскраски из одной орбиты имеют равные веса

12.3.1. Начать нужно, конечно же, с определения веса произвольной орбиты $F \in Y^{\widetilde{X}}/G$. Интуитивно ясно, что веса элементов f любой орбиты F должны совпадать. Действительно, рассмотрим, к примеру, четыре способа окраски помеченных вершин квадрата в не более чем два цвета, показанные на рис. 12. Все они переходят друг в друга под действием группы $G = D_4$ симметрии квадрата. Как следствие, количество вершин, окрашенных в данный конкретный цвет (например, в белый), у этих квадратов одинаков. Поэтому и вес каждого из этих квадратов одинаков и равен w^2b^2. Ясно, что этот факт должен оставаться верным и в общем случае.

Именно, справедливо следующее несложное

Утверждение 12.2. *Пусть $W(Y)$ есть некоторый энумератор множества Y цветов, и пусть вес $W(f)$ произвольной функции $f : \widetilde{X} \to Y$, описывающей некоторую раскраску элементов множества $\widetilde{X}$ в цвета из множества Y, рассчитывается по формуле (63). В этом случае все функции f, принадлежащие одной и той же орбите $F \in Y^{\widetilde{X}}/G$ элементов множества $Y^{\widetilde{X}}$ под действием группы G, имеют один и тот же вес.*

Доказательство. Напомним, что пара функций f_1, f_2 принадлежит одной и той же орбите F, если существует элемент $g \in G$, такой, что

$$f_1(x) = f_2(g^{-1} \circ x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Рассмотрим теперь следующую цепочку равенств:

$$W(f_1) := \prod_{x \in \widetilde{X}} w(f_1(x)) = \prod_{x \in \widetilde{X}} w(f_2(g^{-1} \circ x)) = \prod_{x \in \widetilde{X}} w(f_2(x)).$$

Последнее равенство в этой цепочке выполняется потому, что левое и правое произведения имеют одни и те же сомножители, разве что расположенные в разном порядке. Так как кольцо K у нас коммутативно, то порядок следования сомножителей в нем роли не играет, и поэтому левое и правое произведения действительно равны друг другу. Но правое произведение есть, по определению, вес $W(f_2)$ функции f_2, поэтому из условия $f_1, f_2 \in F$ действительно следует равенство $W(f_1) = W(f_2)$. □

12.3.2. Пользуясь утверждением 12.2, мы можем, наконец, дать формальное определение энумератора $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$ множества $Y^{\widetilde{X}}/G$ всех орбит. Действительно, возьмем *по определению* в качестве веса орбиты $F \in Y^{\widetilde{X}}/G$ вес $W(f)$ любого элемента этой орбиты:

$$W(F) = W(f) \qquad \forall\, f \in F.$$

Это определение корректно, так как, в силу утверждения 12.2, этот вес не зависит от выбора конкретного представителя f элементов орбиты F. Суммируя теперь эти веса $W(F)$ по всем возможным орбитам, мы и получаем энумератор $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$ множества $Y^{\widetilde{X}}/G$ всех орбит:

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = \sum_{F \in Y^{\widetilde{X}}/G} W(F).$$

12.3.3. Итак, мы показали, что функции, принадлежащие одной и той же орбите F, имеют одинаковые веса. Обратное, к сожалению, не верно — существуют функции f_1, f_2, принадлежащие разным орбитам и имеющие одни и те же веса.

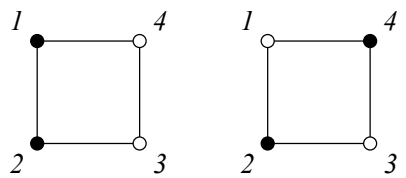


Рис. 13: Две раскраски одного веса из разных орбит

Рассмотрим в качестве примера задачу о раскраске вершин квадрата в не более чем два цвета. Пусть функция f_1 описывает раскраску вершин, при которой две пары противоположных вершин окрашены в разный цвет, а функция f_2 отвечает раскраске, при которой в разный цвет окрашены две пары соседних вершин (рис.13). Очевидно, что эти функции принадлежат различным орбитам множества $Y^{\widetilde{X}}$ под действием группы D_4 симметрий квадрата — никакой элемент g группы D_4 не может перевести одну такую раскраску в другую. Однако обе эти раскраски имеют одинаковый вес. Так, в случае, когда на множестве Y введен энумератор $\varphi(b, w) = b + w$, описывающийся отображениями (61), веса $W(f_1) = W(f_2) = b^2w^2$. В случае,

когда энумератор множества Y есть обыкновенная производящая функция вида $\varphi(z) = 1 + z$, эти веса равны $W(f_1) = W(f_2) = z^2$.

Нам, таким образом, нужно уметь считать количество орбит, имеющих один и тот же вес. В принципе, это можно сделать, используя всю ту же лемму Бернсайда.

12.3.4. Действительно, пусть $Z \subset X$ есть некоторое подмножество множества X, замкнутое относительно действия группы G. Иными словами, действие группы G не выводит нас за пределы данного подмножества Z. Тогда непосредственным следствием леммы Бернсайда (или просто ее переформулировкой в терминах множества Z) является следующая

Лемма 12.3. *Количество орбит элементов Z под действием группы G рассчитывается по формуле*

$$|Z/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Z^g|.$$

Возьмем теперь в качестве Z подмножество функций f, имеющих один и тот же вес. Согласно утверждению 12.2, если функция f_1 имеет какой-то вес $W(f)$, то и любая функция вида $f_2 = g \bullet f_1$ также будет иметь тот же самый вес $W(f)$. Следовательно, подмножество Z является замкнутым относительно действия $\bullet$ группы G на Z, и к нему применима лемма Бернсайда.

Однако оказывается, что как и в случае энумератора $W(Y^{\widetilde{X}})$, наиболее простой ответ получается, если сосчитать сразу весь энумератор $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$, а не отдельные его части. Именно, справедлива следующая

Теорема 12.4 (Пойа, 1937)**.** *Энумератор $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$ множества орбит элементов $Y^{\widetilde{X}}$ под действием группы G рассчитывается по формуле*

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = Z_{\Sigma_G}\left(\sum_{y \in Y} w(y), \sum_{y \in Y} w^2(y), \ldots, \sum_{y \in Y} w^n(y)\right), \tag{66}$$

где $Z_{\Sigma_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — цикловой индекс группы Σ_G перестановок множества $\widetilde{X}$, $w(y)$ — вес элемента $y \in Y$.

12.3.5. Приступим к доказательству теоремы Пойа. Пусть $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ есть множество всех *различных* значений весов функций $f \in Y^{\widetilde{X}}$. Например, в задаче о раскраске вершин квадрата в случае, когда энумератор множества Y цветов описывается отображениями (61), это множество состоит из следующих пяти элементов:

$$\omega_1 = b^4, \qquad \omega_2 = wb^3, \qquad \omega_3 = w^2b^2, \qquad \omega_4 = w^3b, \qquad \omega_5 = w^4.$$

Тогда, по определению энумератора,

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = \sum_{F \in Y^{\widetilde{X}}/G} W(F) = \sum_{i=1}^{m} c(\omega_i) \cdot \omega_i,$$

где $c(\omega_i)$ есть количество орбит F, вес $W(F)$ которых равен ω_i. В частности, в нашем примере

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = b^4 + wb^3 + 2w^2b^2 + w^3b + w^4.$$

Как мы уже упоминали, для любого i количество $c(\omega_i)$ орбит, вес которых равен ω_i, мы можем, вообще говоря, сосчитать с помощью леммы Бернсайда:

$$c(\omega_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_i^g|.$$

Здесь X_i^g есть множество функций $f : \widetilde{X} \to Y$, имеющих заданный вес $W(f) = \omega_i$ и остающихся неподвижными под действием элемента g (то есть таких, что $g \bullet f = f$). Вместо этого мы подставим выражения для $c(\omega_i)$ в формулу для $W(Y^{\widetilde{X}}/G)$ и поменяем в ней порядок суммирования:

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_i^g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot |X_i^g|.$$

Заметим теперь, что внутренняя сумма есть просто сумма

$$\sum_{f\colon g \bullet f = f} W(f) \tag{67}$$

весов всех функций, остающихся неподвижными под действием элемента $g \in G$. Действительно, взяв для фиксированного $g \in G$ все функции f, для которых $g \bullet f = f$, и просуммировав веса этих функций, мы получим

$$\sum_{f\colon g \bullet f = f} W(f) = \omega_1 \cdot \{\text{количество функций } f\colon g \bullet f = f \text{ и } W(f) = \omega_1\} + \ldots +$$

$$+\omega_m \cdot \{\text{количество функций } f\colon g \bullet f = f \text{ и } W(f) = \omega_m\} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \cdot |X_i^g|.$$

Следовательно,

$$W(Y^{\widetilde{X}}/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f\colon g \bullet f = f} W(f),$$

и все, что нам осталось — это сосчитать для любого фиксированного $g \in G$ сумму (67).

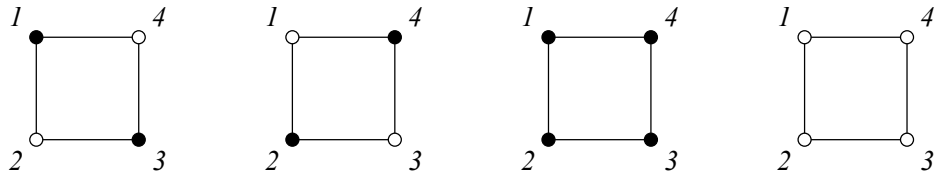


Рис. 14: Неподвижные точки для поворота на 180°

12.3.6. Легче всего понять, как считается такая сумма, на конкретном примере задачи о раскраске вершин квадрата в не более чем два цвета. Рассмотрим элемент g группы D_4 симметрий квадрата, отвечающий повороту квадрата на угол 180°. Нас интересуют раскраски вершин квадрата, остающиеся неподвижными под действием элемента g. Как мы уже хорошо понимаем, в любой подобной раскраске каждая пара противоположных вершины квадрата должна быть окрашена в один и тот же цвет. Все такие способы окраски показаны на рис. 14. Первым двум способам окраски отвечают веса $W(f) = b^2w^2$, а третьему и четвертому — веса $W(f) = b^4$ и $W(f) = w^4$ соответственно. Суммируя эти веса, получаем, что в данном конкретном случае

$$\sum_{f\colon g \bullet f = f} W(f) = b^4 + 2b^2w^2 + w^4 = (b^2 + w^2)^2.$$

Постараемся теперь понять, почему в данном конкретном случае мы получили такой результат. Повороту на 180 градусов в группе Σ_G отвечает перестановка $\sigma_g = (13)(24)$. Для того, чтобы под действием этой перестановки раскрашенный квадрат перешел в себя, вершины 1 и 3 должны быть окрашены *либо* в белый, *либо* в черный цвет. Иными словами, вес этих двух вершин должен быть одинаков и равен либо b^2, либо w^2. На языке производящих функций выбору одного из двух вариантов отвечает знак плюс. Поэтому окончательно энумератор, описывающий окраску вершин 1 и 3, имеет вид $w^2 + b^2$. Независимо от выбора цвета вершин 1 и 3, вершины 2 и 4 также должны быть окрашены либо в первый, либо во второй цвет. Поэтому окраска этих вершин также задается энумератором вида $w^2 + b^2$. Окраска же всех четырех вершин, согласно комбинаторному смыслу произведения, описывается энумератором $(b^2 + w^2)^2$.

12.3.7. Вернемся теперь к общему случаю и предположим, что соответствующая элементу $g \in G$ перестановка $\sigma_g \in \Sigma_G$ имеет цикловой тип $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$. Рассмотрим элементы $x \in \widetilde{X}$ фигуры Γ, входящие в один и тот же цикл перестановки σ_g, имеющий длину l. Все эти элементы должны быть окрашены одинаково, то есть должны иметь один и тот же вес. Так как этот вес может быть любым, то энумератор, описывающий нужный нам способ окраски этих вершин, записывается в виде

$$w^l(y_1) + w^l(y_2) + \ldots + w^l(y_k) = \sum_{j=1}^{k} w^l(y_j).$$

При этом энумератор, описывающий все способы окраски, переходящие в себя под действием перестановки σ_g, равен, очевидно,

$$\sum_{f:\, g\bullet f = f} W(f) = (w^1(y_1) + \ldots + w^1(y_k))^{i_1} \cdot (w^2(y_1) + \ldots + w^2(y_k))^{i_2} \cdot \ldots \cdot (w^n(y_1) + \ldots + w^n(y_k))^{i_n}.$$

Вспоминая теперь, что вся информация о цикловом типе перестановок группы Σ_G содержится в цикловом индексе

$$Z_{\Sigma_G}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|\Sigma_G|} \sum_{\sigma \in \Sigma_G} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

группы Σ_G, мы и получаем окончательно формулу (66), описывающую энумератор множества непомеченных окрашенных объектов.

12.3.8. В качестве примера сосчитаем с помощью теоремы Пойа энумератор множества $Y^{\widetilde{X}}/D_4$ геометрически различных способов окраски вершин квадрата в не более чем два цвета. Цикловой индекс группы Σ_{D_4} перестановок вершин квадрата имеет вид

$$Z_{\Sigma_{D_4}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}[x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4].$$

Подставляя вместо x_i выражения вида $b^i + w^i$, мы и получаем, что

$$W(Y^{\widetilde{X}}/D_4) = \frac{1}{8}\left[(b+w)^4 + 2(b+w)^2(b^2+w^2) + 3(b^2+w^2)^2 + 2(b^4+w^4)\right] =$$

$$= b^4 + wb^3 + 2w^2b^2 + w^3b + w^4.$$

Список литературы

[1] M. Bona. *A Walk Through Combinatorics: an introduction to enumeration and graph theory.* World Sciendific Publishing Co, second edition edition, 2006.

[2] G. Labelle F. Bergeron and P. Leroux. *Combinatorial Species and Tree-Like Structures.* Cambridge University Press, 1998.

[3] G. Labelle F. Bergeron and P. Leroux. *Introduction to the Theory of Species of Structures.* 2008.

[4] Орен Паташник Дональд Кнут, Роналд Грэхем. *Конкретная математика. Основание информатики.* М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006.

[5] П.А.Виленкин Н.Я. Виленкин, А.Н.Виленкин. *Комбинаторика.* М.: МЦНМО, 2006.

[6] Р. Стенли. *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции.* М.: Мир, 2005.