Формула Эйлера (ДЗ).

1 апреля 2017 г.

1. Напомним, что обхватом h графа называется длина наименьшего цикла в нем. Доказать, что для связного простого планарного графа G, имеющего n вершин и m ребер, справедливо неравенство
$$m \leq \frac{h(n-2)}{h-2}.$$
Пользуясь доказанным неравенством, показать, что граф Петерсена планарным не является.

2. Показать, что если количество n вершин в графе G больше или равно 11, то либо сам граф G, либо дополнение к нему $\bar{G}$ планарным не являются.

3. Перерисовать изображенный на рис. 1 плоский граф $\tilde{G}$ так, чтобы ребра такого графа представляли собой отрезки прямых.

4. Доказать, что любой из двух изображенных на рис.2 графов является планарным. Тем самым будет доказано, что существует планарный граф на восьми вершинах, дополнение к которому также является планарным графом.

5. Доказать, что толщина графа Петерсена равна двум.

6. Доказать оценку
$$t(K_n) \geq \left\lfloor \frac{n+7}{6} \right\rfloor. \tag{1}$$
Так как эта оценка точна для графов K_8 и K_4, то тем самым мы докажем, что она точна и для любых полных графов K_n, $n \leq 8$.

7. Граф, который можно правильно вложить в поверхность рода g и невозможно вложить в поверхность меньшего рода, называется

графом рода g. Доказать, что род произвольного простого связного графа G удовлетворяет неравенству

$$g \geq 1 + \frac{m}{6} - \frac{n}{2}, \tag{2}$$

а род простого связного графа, свободного от треугольников — неравенству

$$g \geq 1 + \frac{m}{4} - \frac{n}{2}. \tag{3}$$

8. Доказать, что род полного графа K_n удовлетворяет неравенству

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

9. Доказать, что род полного двудольного графа $K_{n,m}$ удовлетворяет неравенству

$$g(K_{n,m}) \geq \frac{(m-2)(n-2)}{4}.$$

10. Доказать, что род k-мерного куба Q_k удовлетворяет неравенству

$$g(Q_k) \geq 1 + (k-4) \cdot 2^{k-3}.$$