DL 38. Приведите пример замкнутой формулы в сигнатуре $\mathfrak{P} = \{=\}, \mathfrak{F} = \{+, \times, 1\}$, которая истинна в естественной интерпретации на множестве рациональных чисел, но ложна в естественной интерпретации на множестве вещественных чисел.

DL 39. На множестве $\mathbb{N}$ задайте формулу в сигнатуре $(S, =)$, которая выражает предикат $x = y + N$, где S — это функция прибавления 1, N — конкретное натуральное число. Длина такой формулы должна быть $O(\log_2 N)$.

DL 40. Покажите, что предикат $y = x + 1$ невыразим в интерпретации $(\mathbb{Z}, =, x \mapsto x + 2)$.

DL 41. Покажите, что предикат «p — n-ое простое число» является выразимым в арифметике.

DL 42. Покажите, что предикат $x = 2$ невыразим в интерпретации $(\mathbb{N}, =,$ “x делит y”$)$.

DL 43. Вычислите суммы:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^m \cdot \binom{n}{k}$, где $m < n$.

DL 44. Докажите, что:

а) число способов разбить число n на сумму k натуральных слагаемых равна $\binom{n-1}{k-1}$;

б) число способов разбить число n ну сумму k целых неотрицательных слагаемых, равняется $\binom{n+k-1}{k-1}$.

DL 28. Докажите, что если булева функция вычисляется с помощью ветвящейся программы размера S, то она вычисляется и с помощью булевой схемы размера $O(S)$.

DL 31.

а) Докажите, что при суммировании двоичных чисел $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ и $\overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1}$ перенос в i-м разряде происходит тогда и только тогда, когда число $\overline{a_i a_{i-1} \ldots a_1}$ больше числа $\overline{b'_i b'_{i-1} \ldots b'_1}$, где $b'_k = 1 - b_k$ для всех k от 1 до n. Далее считаем, что $n = 2^m$.

б) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_j a_{j-1} \ldots a_{j-2^k+1}}$ с $\overline{b'_j b'_{j-1} \ldots b'_{j-2^k+1}}$ для всех $k \le m$ и всех j, кратных 2^k (при этом $j \le n$). Результат сравнения можно хранить в двух битах: 00, если первое число меньше, 11, если первое число больше и 10, если числа равны.

в) Постройте схему размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$, которая вычислит результаты сравнений чисел $\overline{a_i a_{i-1} \ldots a_1}$ и $\overline{b'_i b'_{i-1} \ldots b'_1}$ для всех i от 1 до n.

г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

DL 33. Функция голосования $Maj_{2k+1} : \{0,1\}^{2k+1} \to \{0,1\}$ равняется 1 тогда и только тогда, когда хотя бы $k+1$ битов входа равняется единице. Покажите, что существует схема, вычисляющая функцию голосования, размера $O(k)$.

DL 37. Рассмотрим плоскость как интерпретацию сигнатуры, содержащей предикат равенства (совпадения точек) и двуместный предикат «находиться на расстоянии 1». Как выразить предикаты «находиться на расстоянии 2» и «находиться на расстоянии не более 2»?