# Задания

9 марта 2017 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
   (a) Начальные объекты.
   (b) Копроизведения объектов.
   (c) Булевский объект.

2. Докажите, что пулбэк любого мономорфизма также является мономорфизмом.

3. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.

4. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \to 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

   Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого $X$ произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.

5. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
   (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
   (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней все объекты являются терминальными).
   (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

6. Пусть в диаграмме вида

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

7. Докажите, что в **Ab** существуют все копроизведения.

8. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех $A$ и $B$ существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.

9. Идемпотентный морфизм $h : B \to B$ является расщепленным, если существуют $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.

10. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.

11. Пусть в категории **C** есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в **C** морфизмы $and, or : Bool \times Bool \to Bool$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle true{,}true \rangle"'] \arrow[dr, "true"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "and"'] & Bool \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle true{,}true \rangle"'] \arrow[dr, "true"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "or"'] & Bool \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle true{,}false \rangle"'] \arrow[dr, "false"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "and"'] & Bool \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle true{,}false \rangle"'] \arrow[dr, "true"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "or"'] & Bool \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle false{,}true \rangle"'] \arrow[dr, "false"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "and"'] & Bool \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle false{,}true \rangle"'] \arrow[dr, "true"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "or"'] & Bool \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle false{,}false \rangle"'] \arrow[dr, "false"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "and"'] & Bool \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle false{,}false \rangle"'] \arrow[dr, "false"] & \\ Bool \times Bool \arrow[r, "or"'] & Bool \end{tikzcd}$$

12. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

    Пусть **C** – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

    (a) **C** – категория предпорядка.

    (b) В **C** терминальный объект является булевским.

    (c) В **C** существует булевский объект, такой что $true = false$.