

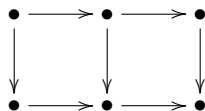
Задания

9 марта 2017 г.

1. Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - (a) Начальные объекты.
 - (b) Копроизведения объектов.
 - (c) Булевский объект.
2. Докажите, что пулбэк любого мономорфизма также является мономорфизмом.
3. Докажите, что если $A \amalg B$ существует, то $B \amalg A$ тоже существует и изоморфен $A \amalg B$.
4. Начальный объект 0 произвольной категории называется *строгим*, если любой морфизм вида $X \rightarrow 0$ является изоморфизмом. Например, в **Set** пустое множество является строгим начальным объектом. В **Grp** тривиальная группа не является строгим начальным объектом, хоть и является начальным.

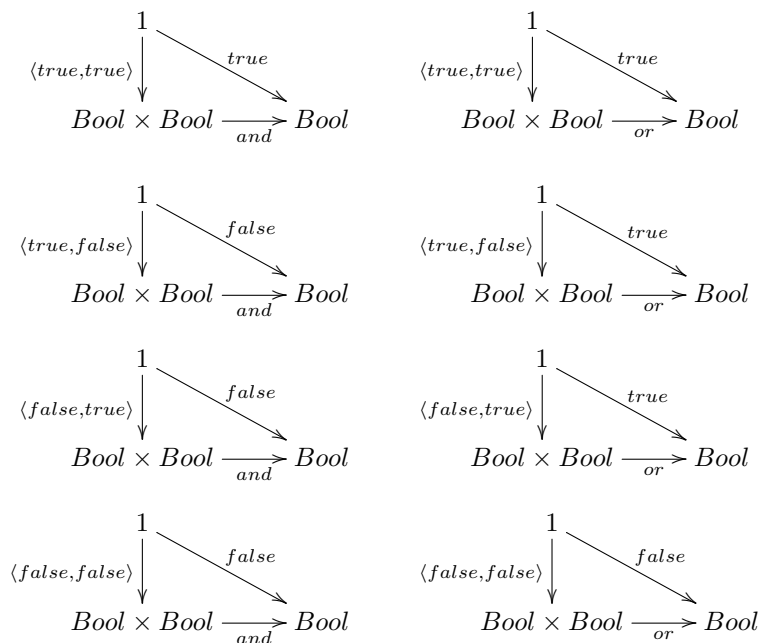
Докажите, что в произвольной категории начальный объект 0 является строгим тогда и только тогда, когда для любого X произведение $X \times 0$ существует и $X \times 0 \simeq 0$.
5. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
 - (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
 - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней все объекты являются терминальными).
 - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

6. Пусть в диаграмме вида



правый квадрат является пулбэком. Докажите, что левый квадрат является пулбэком тогда и только тогда, когда внешний прямоугольник является пулбэком.

7. Докажите, что в \mathbf{Ab} существуют все копроизведения.
8. Приведите нетривиальный пример категории, в которой для всех A и B существуют сумма и произведение и $A \amalg B \simeq A \times B$.
9. Идемпотентный морфизм $h : B \rightarrow B$ является расщепленным, если существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$. Докажите, что если в категории существуют коуравнители, то любой идемпотентный морфизм расщеплен.
10. Докажите, что если в категории существуют терминальный объект и пулбэки, то в ней существуют все конечные пределы.
11. Пусть в категории \mathbf{C} есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в \mathbf{C} морфизмы $and, or : Bool \times Bool \rightarrow Bool$, такие что следующие диаграммы коммутируют



12. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть \mathbf{C} – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a) \mathbf{C} – категория предпорядка.
- (b) В \mathbf{C} терминальный объект является булевским.
- (c) В \mathbf{C} существует булевский объект, такой что $true = false$.