

Вопросы к экзамену по комбинаторике

1. Правило суммы. Понятие k -сочетания без повторений. Рекуррентное соотношение, треугольник Паскаля, его симметричность. Основные тождества (суммирование по верхнему индексу, суммирование по диагонали, тождество Вандермонда), их формальное и комбинаторное доказательство. Принцип биекции. Биномиальная формула, ее простые следствия.

2. Понятие k -сочетания с повторениями. Подсчет их числа с помощью принципа биекции. Формальное и комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения. Доказательство тождества

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+k-i-1}{n} = \binom{n+k}{n+1},$$

вывод его следствий (сумма квадратов и сумма кубов).

3. Понятие k -перестановки из n элементов (с повторениями и без повторений), их количество. Количество подмножеств данного множества. Рекуррентное соотношение для k -перестановок без повторений; формальное и комбинаторное доказательства. Связь количества k -перестановок и k -сочетаний без повторений. Урновые схемы для k -сочетаний и k -перестановок.

4. Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам: сравнение этих схем для k -сочетаний и k -перестановок из n элементов. Задачи о разбиении числа k на n слагаемых.

5. Задачи о подсчете количества отображений конечных множеств. Количество сюръективных отображений. Формулы обращения.

6. Подсчет количества разделений и упорядоченных разбиений множества X . Перестановки с повторениями. Биекции между количеством перестановок с повторениями и k -сочетаниями без повторений и с повторениями.

7. Задачи о подсчете количества раскладок n различных предметов по k неразличимым ящикам. Числа Стирлинга 2-го рода, рекуррентное соотношение для них. Числа Белла, их комбинаторный смысл, рекуррентное соотношение для чисел Белла.

8. Производящие функции — основные определения, операции, свойства. Простейшие примеры.

9. Рекуррентные соотношения — основные определения, методы решения, не использующие производящие функции. Числа Фибоначчи.

10. Построение решений линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами с помощью обыкновенных производящих функций.

11. Производная и интеграл производящей функции. Построение решений линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами с помощью производящих функций.

12. Нелинейные рекуррентные соотношения. Числа Каталана.

13. Комбинаторный смысл произведения обыкновенных и экспоненциальных производящих функций. Примеры.

14. Решение задач о раскладке различных предметов по различным ящикам с помощью экспоненциальных производящих функций.

15. Решение задач о раскладке неразличимых предметов по различным ящикам с помощью

обыкновенных производящих функций.

16. Комбинаторный смысл композиции обыкновенных производящих функций. Примеры.

17. Задача о марках и бандероли в случае, когда порядок наклейки марок не важен — рекуррентное соотношение, решение с помощью обыкновенных производящих функций. Обобщения этой задачи. Задача о разбиении числа n на слагаемые. Простейшие свойства количества $p(n)$ таких разбиений.

18. Задачи раскладки неразличимых предметов по неразличимым ящикам. Их решение с помощью аппарата обыкновенных производящих функций.

19. Количество $p_k(n)$ разбиений целого положительного числа n ровно на k слагаемых — определение, простейшие свойства, рекуррентные соотношения. Количество $P_k(n)$ разбиений целого положительного числа n на не более чем k частей — определение, простейшие свойства, рекуррентные соотношения, связь с числами $p_k(n)$.

20. Диаграммы Ферре. Двойственные диаграммы. Диаграммная техника доказательств свойств чисел $p_k(n)$ и $P_k(n)$. Производящие функции для задач раскладки n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам.

21. Пентагональная теорема Эйлера. Комбинаторное доказательство Франклина. Рекуррентное соотношение для чисел $p(n)$.

22. Экспоненциальная формула, комбинаторный смысл. Рекуррентное соотношение для коэффициентов производящих функций. Простейшие примеры.

23. Композиционная формула, комбинаторный смысл, простейшие примеры. Количество помеченных графов и количество помеченных связных графов. Разбиение множества, числа Белла. Комбинаторный смысл композиционной формулы в случае $b_k = t^k$.

24. Формула Фаа ди Бруно в комбинаторике и в математическом анализе. Полиномы Белла, комбинаторный смысл полиномов, а также их коэффициентов. Рекуррентные соотношения для полиномов Белла. Числа Стирлинга второго рода как частный случай полиномов Белла.

25. Перечисление орграфов и связных орграфов, перечисление Эйлеровых графов. Доказательство теоремы Кэли о количестве помеченных деревьев с помощью кода Прюфера.

26. Помеченные деревья, корневые деревья, леса. Связь между количеством помеченных корневых деревьев и помеченных корневых лесов. Комбинаторный смысл произведения экспоненциальных производящих функций x и $F(x)$, производной $F'(x)$ экспоненциальной производящей функции, а также произведения $x \cdot F'(x)$.

27. Композиция обыкновенных производящих функций как бинарная операция на множестве таких функций. Сведение задачи о перечислении корневых помеченных деревьев к задаче поиска обратного элемента по отношению к операции композиции обыкновенных производящих функций. Алгоритм поиска количества корневых помеченных деревьев.

28. Теорема Лагранжа об обращении — формулировка и доказательство. Явная формула для количества помеченных корневых деревьев.

29. Количество перестановок как количество разбиений n -элементного множества на блоки с последующим циклическим упорядочиванием элементов в каждом блоке. Числа Стирлинга первого рода как количество разбиений n -элементного множества ровно на k блоков с после-

дующим циклическим упорядочиванием элементов в каждом блоке.

30. Числа Стирлинга первого рода — производящая функция, рекуррентное соотношение, связь с возрастающими факториальными числами. Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

31. Цикловой индекс и дополненный цикловой индекс перестановки, их комбинаторный смысл, явное выражение и связь с композиционной формулой. Рекуррентные соотношения для цикловых индексов.

32. Количество D_n перестановок без единичных циклов, а также количество $d(n, k)$ перестановок, не содержащих циклов единичной длины и содержащих ровно k циклов: производящие функции, рекуррентные соотношения, связь с числами Стирлинга первого рода. Примеры — задачи о смещении, о беспорядках и пр.