

# Вопросы к экзамену по комбинаторике

**1.** Правило суммы. Понятие  $k$ -сочетания без повторений. Рекуррентное соотношение, треугольник Паскаля, его симметричность. Основные тождества (суммирование по верхнему индексу, суммирование по диагонали, тождество Вандермонда), их формальное и комбинаторное доказательство. Принцип биекции. Биномиальная формула, ее простые следствия.

**2.** Понятие  $k$ -сочетания с повторениями. Подсчет их числа с помощью принципа биекции. Формальное и комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения. Доказательство тождества

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+k-i-1}{n} = \binom{n+k}{n+1},$$

вывод его следствий (сумма квадратов и сумма кубов).

**3.** Понятие  $k$ -перестановки из  $n$  элементов (с повторениями и без повторений), их количество. Количество подмножеств данного множества. Рекуррентное соотношение для  $k$ -перестановок без повторений; формальное и комбинаторное доказательства. Связь количества  $k$ -перестановок и  $k$ -сочетаний без повторений. Урновые схемы для  $k$ -сочетаний и  $k$ -перестановок.

**4.** Урновые схемы и схемы раскладки предметов по ящикам: сравнение этих схем для  $k$ -сочетаний и  $k$ -перестановок из  $n$  элементов. Задачи о разбиении числа  $k$  на  $n$  слагаемых.

**5.** Задачи о подсчете количества отображений конечных множеств. Количество сюръективных отображений. Формулы обращения.

**6.** Подсчет количества разделений и упорядоченных разбиений множества  $X$ . Перестановки с повторениями. Биекции между количеством перестановок с повторениями и  $k$ -сочетаниями без повторений и с повторениями.

**7.** Задачи о подсчете количества раскладок  $n$  различных предметов по  $k$  неразличимым ящикам. Числа Стирлинга 2-го рода, рекуррентное соотношение для них. Числа Белла, их комбинаторный смысл, рекуррентное соотношение для чисел Белла.

**8.** Производящие функции — основные определения, операции, свойства. Простейшие примеры.

**9.** Рекуррентные соотношения — основные определения, методы решения, не использующие производящие функции. Числа Фибоначчи.

**10.** Построение решений линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами с помощью обыкновенных производящих функций.

**11.** Производная и интеграл производящей функции. Построение решений линейных рекуррентных соотношений с переменными коэффициентами с помощью производящих функций.

**12.** Нелинейные рекуррентные соотношения. Числа Каталана.

**13.** Комбинаторный смысл произведения обыкновенных и экспоненциальных производящих функций. Примеры.

**14.** Решение задач о раскладке различных предметов по различным ящикам с помощью экспоненциальных производящих функций.

**15.** Решение задач о раскладке неразличимых предметов по различным ящикам с помощью

обыкновенных производящих функций.

16. Комбинаторный смысл композиции обыкновенных производящих функций. Примеры.
17. Задача о марках и бандероли в случае, когда порядок наклейки марок не важен — рекуррентное соотношение, решение с помощью обыкновенных производящих функций. Обобщения этой задачи. Задача о разбиении числа  $n$  на слагаемые. Простейшие свойства количества  $p(n)$  таких разбиений.
18. Задачи раскладки неразличимых предметов по неразличимым ящикам. Их решение с помощью аппарата обыкновенных производящих функций.
19. Количество  $p_k(n)$  разбиений целого положительного числа  $n$  ровно на  $k$  слагаемых — определение, простейшие свойства, рекуррентные соотношения. Количество  $P_k(n)$  разбиений целого положительного числа  $n$  на не более чем  $k$  частей — определение, простейшие свойства, рекуррентные соотношения, связь с числами  $p_k(n)$ .
20. Диаграммы Ферре. Двойственные диаграммы. Диаграммная техника доказательств свойств чисел  $p_k(n)$  и  $P_k(n)$ . Производящие функции для задач раскладки  $n$  неразличимых предметов по  $k$  неразличимым ящикам.
21. Пентагональная теорема Эйлера. Комбинаторное доказательство Франклина. Рекуррентное соотношение для чисел  $p(n)$ .
22. Экспоненциальная формула, комбинаторный смысл. Рекуррентное соотношение для коэффициентов производящих функций. Простейшие примеры.
23. Композиционная формула, комбинаторный смысл, простейшие примеры. Количество помеченных графов и количество помеченных связных графов. Разбиение множества, числа Белла. Комбинаторный смысл композиционной формулы в случае  $b_k = t^k$ .
24. Формула Фаа ди Бруно в комбинаторике и в математическом анализе. Полиномы Белла, комбинаторный смысл полиномов, а также их коэффициентов. Рекуррентные соотношения для полиномов Белла. Числа Стирлинга второго рода как частный случай полиномов Белла.
25. Перечисление орграфов и связных орграфов, перечисление Эйлеровых графов. Доказательство теоремы Кэли о количестве помеченных деревьев с помощью кода Прюфера.
26. Помеченные деревья, корневые деревья, леса. Связь между количеством помеченных корневых деревьев и помеченных корневых лесов. Комбинаторный смысл произведения экспоненциальных производящих функций  $x$  и  $F(x)$ , производной  $F'(x)$  экспоненциальной производящей функции, а также произведения  $x \cdot F'(x)$ .
27. Композиция обыкновенных производящих функций как бинарная операция на множестве таких функций. Сведение задачи о перечислении корневых помеченных деревьев к задаче поиска обратного элемента по отношению к операции композиции обыкновенных производящих функций. Алгоритм поиска количества корневых помеченных деревьев.
28. Теорема Лагранжа об обращении — формулировка и доказательство. Явная формула для количества помеченных корневых деревьев.
29. Количество перестановок как количество разбиений  $n$ -элементного множества на блоки с последующим циклическим упорядочиванием элементов в каждом блоке. Числа Стирлинга первого рода как количество разбиений  $n$ -элементного множества ровно на  $k$  блоков с после-

дующим циклическим упорядочиванием элементов в каждом блоке.

**30.** Числа Стирлинга первого рода — производящая функция, рекуррентное соотношение, связь с возрастающими факториальными числами. Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

**31.** Цикловой индекс и дополненный цикловой индекс перестановки, их комбинаторный смысл, явное выражение и связь с композиционной формулой. Рекуррентные соотношения для цикловых индексов.

**32.** Количество  $D_n$  перестановок без единичных циклов, а также количество  $d(n, k)$  перестановок, не содержащих циклов единичной длины и содержащих ровно  $k$  циклов: производящие функции, рекуррентные соотношения, связь с числами Стирлинга первого рода. Примеры — задачи о смещении, о беспорядках и пр.