Перечисление помеченных структур

1 Графы и их перечисление

1.1. Напомним основные понятия, связанные с теории графов.

1.1.1. Начнем с формального и довольно общего определения неориентированного графа.

Определение 1.1. Неориентированным графом G называется тройка

$$G = (V, E, I),$$

состоящая из

(1) (конечного) множества вершин V, например,

$$V = \{1, 2, 3, 4\},$$

(2) (конечного) множества ребер E, например,

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

(3) а также отображения I из множества ребер E в множество $V^{(2)}$ неупорядоченных пар вершин графа, сопоставляющего любому ребру $e \in E$ неупорядоченную пару вершин $\{x, y\}$, которую это ребро соединяет.

При этом говорят, что вершины x и y являются *концами* ребра e, а ребро e *инцидентно* своим концам или, иначе, *соединяет* свои концевые вершины. Записывают же этот факт следующим образом: $e = \{x, y\}$. В принципе, возможен случай $x = y$; такое ребро называется обычно *петлей.*

Пример 1.2. Зададим отображение I в виде следующей таблицы:

E	$V^{(2)}$
a	$\{1,3\}$
b	$\{2,4\}$
c	$\{1,3\}$
d	$\{3,4\}$
e	$\{3,4\}$
f	$\{1,2\}$
g	$\{3,4\}$
h	$\{2,2\}$

Ей соответствует граф G, изображенный на рисунке справа от таблицы.

1.1.2. На практике довольно часто встречаются так называемые простые графы.

Определение 1.3. Граф G называется *простым,* если он не содержит

(1) петель,

(2) кратных ребер (или мультиребер), то есть различных ребер, инцидентных одной и той же паре вершин.

Граф, не являющийся простым, часто называют *мультиграфом.*

Очевидно, что любой простой граф G допускает более простое описание. Именно, его можно рассматривать как некоторое подмножество множества всех неупорядоченных пар его вершин:

$$G \subseteq V^{(2)}.$$

Иными словами, простой граф — это граф, построенный на n вершинах, любая пара которых может быть соединена или не соединена ребром. Например, пустому подмножеству отвечает граф, состоящий из n так называемых *изолированных* вершин — граф, в котором никакая вершина не соединена ни с какой другой вершиной. Подмножеству, состоящему ровно из $\binom{n}{2}$ вершин, соответствует так называемый *полный* граф K_n — граф, в котором каждая вершина соединена со всеми оставшимися вершинами графа.

Количество же всех неупорядоченных пар вершин n-множества V (то есть мощность множества $V^{(2)}$) мы знаем — оно равно $|V^{(2)}| = \binom{n}{2}$. Следовательно, мы сразу же можем подсчитать количество g_n всех простых (неориентированных) графов — оно равно мощности множества всех подмножеств множества $V^{(2)}$:

$$g_n = 2^{\binom{n}{2}}. \tag{1}$$

Например, для $n = 3$ имеется 8 различных простых графов: (рисунок).

1.1.3. Наряду с неориентированными, в теории графов также изучаются и так называемые ориентированные графы (или орграфы).

Определение 1.4. Если в тройке

$$G = (V, E, I)$$

отображение I ставит в соответствие любому ребру e *упорядоченную* пару вершин (x, y), то есть если $I : V \to V \times V$, то соответствующий такой тройке граф G называется *ориентированным* графом (или *орграфом*). В таком случае говорят, что ребро e *выходит* из вершины x и *входит* в вершину y. На рисунке такое ребро изображается в виде направленного отрезка, то есть отрезка со стрелкой на одном из его концов.

Определение 1.5. Орграф называется *простым,* если он не содержит

(1) петель;

(2) ребер с одинаковыми *упорядоченными* парами вершин.

Так как имеется $n(n-1)$ упорядоченных пар вершин, то существует $2^{n(n-1)}$ различных простых орграфов, построенных на n вершинах.

1.1.4. Вернемся к общему случаю графов или орграфов.

Определение 1.6. Говорят, что вершина y смежна с вершиной x, если в графе G существует ребро $\{x, y\}$, а в орграфе G — ребро (x, y).

Для неориентированного графа отношение смежности является симметричным. Для орграфа это не так: если существует ребро (x, y), то вершина y смежна с x, а вот x может и не быть смежной с y: вершина x будет смежной с y, если еще существует и ребро (y, x).

Для хранения графа в памяти компьютера как правило используются две структуры, тесно связанные с понятием смежности — матрица смежности и список смежности.

Матрица смежности — это матрица M_a размерами $n \times n$, любой элемент a_{ij} которой описывает количество ребер, идущих из вершины i в вершину j. Так, для примера 1.2 соответствующая графу G матрица смежности имеет следующий вид:

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что для неориентированного графа матрица смежности всегда симметрична. В случае простого графа все диагональные элементы $a_{ii} = 0$, а элементы, не лежащие на диагонали, равны

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует ребро, идущее из вершины } i \text{ в вершину } j; \\ 0, & \text{если такого ребра не существует.} \end{cases}$$

Список смежности — это линейный массив L_a размера n, каждый элемент a_i которого содержит список смежных с i вершин. Для примера 1.2 соответствующий список имеет следующий вид:

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{смежна с} & 2, 3, 3 \\ 2 & \text{смежна с} & 1, 2, 4 \\ 3 & \text{смежна с} & 1, 1, 4, 4, 4 \\ 4 & \text{смежна с} & 2, 3, 3, 3 \end{array}$$

Определение 1.7. В неориентированном графе G *степенью* $\deg(x)$ или *валентностью* вершины x называется количество ребер, инцидентных x. Считается, что петля дает вклад, равный двум, в степень любой вершины. Вершина, степень которой равна нулю, называется *изолированной.* Если все вершины в графе G имеют одинаковую степень, то граф G называют *регулярным.*

В орграфе различают исходящую степень и входящую степень, а также просто степень, равную сумме входящей и исходящей степеней.

Теорема 1.8. *В неориентированном графе G сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству всех ребер графа:*

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2|E(G)|.$$

Доказательство практически очевидно — любое ребро дает вклад, равный двум, в стоящую слева сумму.

Следствие 1.9. *Количество вершин в графе G, имеющих нечетную степень, четно.*

1.1.5. Как было показано в примере 1.2, граф часто нагляднее изображать в виде рисунка: любую вершину можно изображать точкой, а ребро — отрезком, соединяющим какую-то пару точек. Заметим, однако, что один и тот же граф можно изобразить на картинке многими разными способами. Например, обе картинки на рис. отвечают одному и тому же графу.

Понять, изображают ли два рисунка один и тот же граф, или они отвечают разным графам, можно с помощью понятия *автоморфизма* графа. Для простоты определение автоморфизма дадим для простых графов.

Определение 1.10. Пусть G — простой граф, $\sigma : V \to V$ — некоторая перестановка множества V его вершин. Если для любой пары $\{x, y\}$ вершин, соединенных ребром в G, соответствующая пара $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ вершин также соединена ребром, то говорят, что перестановка σ множества V задает некоторый автоморфизм графа G.

Теперь рассмотрим чуть более широкое понятие изоморфизма графов.

Определение 1.11. Говорят, что два графа G_1 и G_2 изоморфны, если существует взаимно-однозначное соответствие φ между множествами V_1 и V_2 вершин, такое, что если в графе G_1 некоторая пара вершин $\{x, y\}$ соединена ребром, то в графе G_2 соответствующая ей пара вершин $\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}$ также соединена ребром, и наоборот.

Графы, рассматриваемые с точностью до автоморфизма его вершин, называются помеченными графами. Такие объекты перечислять довольно легко. Так, мы уже установили, что количество помеченных простых графов, построенных на n вершинах, равно $2^{\binom{n}{2}}$.

Графы, рассматриваемые с точностью до изоморфизма, называются непомеченными. Задача перечисления такого рода объектов является, как правило, значительно более сложной по сравнению с задачей перечисления помеченных объектов.

В данной главе мы сосредоточим наши усилия на перечислении помеченных объектов. Техника перечисления непомеченных объектов будет развита в следующих двух главах.

1.2. Перейдем теперь к важному понятию связных графов.

Определение 1.12. Путем (длины k) в графе G из вершины x_0 в вершину x_1 называется чередующаяся последовательность

$$x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, x_{k-1}, e_k, x_k$$

вершин $x_i \in V$ (не обязательно различных) и ребер $e_i \in E$, соединяющих точки x_{i-1} и x_i. В случае простого графа любой путь полностью определяется последовательностью $(k+1)$-х вершин

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k,$$

любые два последовательных элемента x_{i-1}, x_i которой являются смежными вершинами (т.е. соединены между собой ребром $e_i = \{x_{i-1}, x_i\} \in E(G)$).

Если все вершины в данном пути различны, то путь называется простым, если же различны все ребра — то реберно-простым.

В случае $x_0 = x_k$ путь называется замкнутым путем или *циклом.* Цикл называется простым, если $k \geqslant 1$ и все его вершины за исключением вершин $x_0 = x_k$ различны. Наконец, цикл называется реберно-простым, если у него различны все ребра.

Определение 1.13. Если пара вершин $x, y \in V$ графа G соединены хотя бы одним путем, то они называются связанными. В случае орграфа вершины называются связанными, если в G существуют хотя бы один путь из x в y и хотя бы один путь из y в x.

Связанность задает на множестве V вершин графа G отношение эквивалентности. Это отношение делит граф на классы эквивалентности, называющиеся компонентами связности графа (компонентами сильной связности ографа). В случае, когда в G существует лишь одна компонента связности, то есть в случае, когда для любой пары вершин $x, y \in V(G)$ существует путь между этими вершинами, граф называется связным или односвязным. В противном случае граф называется несвязным или k-связным, где k — количество компонент связности графа.

Заметим, что в неориентированном графе между различными компонентами связности ребер не существует. В орграфе такие ребра могут существовать, однако направлены все они будут лишь от одной компоненты связности к другой.

1.3. Мы уже знаем количество g_n всех простых графов, построенных на n вершинах. Возникает вопрос — можно ли, зная только эти числа g_n, определить количество односвязных или, в общем случае, k-связных графов? Оказывается, это вполне можно сделать, используя введенное в конце третьей главы понятие композиции экспоненциальных производящих функций.

Действительно, пусть у нас имеется n-элементное множество V вершин, и пусть $g_n^{(c)}$ есть количество способов совершить на этом множестве следующее комбинаторное действие — построить на V простой связный граф $G^{(c)}$. Тогда любой простой граф G, состоящий из k связных компонент, может быть получен с помощью следующих комбинаторных действий: разбиения n-множества V вершин на k непустых неупорядоченных блоков и построения на любом из этих блоков размером i_m связного графа $g_{i_m}^{(c)}$ числом способов.

Как следствие, если

$$G(z) = 1 + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 2 \cdot \frac{z^2}{2!} + 8 \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots + 2^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

есть экспоненциальная производящая функция для количества g_n всех простых графов, а

$$G^{(c)}(z) = 0 + 1 \cdot \frac{z^1}{1!} + 1 \cdot \frac{z^2}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots + g_n^{(c)} \cdot \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

представляет собой аналогичную производящую функцию для количества $g_n^{(c)}$ всех связных простых графов, то, согласно комбинаторному смыслу композиции производящих функций, функции $G(z)$ и $G^{(c)}(z)$ связаны следующим равенством:

$$G(z) = \exp(G^{(c)}(z)).$$

Отсюда, в частности, следует такое рекуррентное соотношение для подсчета чисел $g_n^{(c)}$ (смотри п.3.1 параграфа 5 главы 3):

$$g_{n+1}^{(c)} = g_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} g_i^{(c)} \, g_{n+1-i} = 2^{\binom{n+1}{2}} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} g_i^{(c)} \, 2^{\binom{n+1-i}{2}}.$$

Для того, чтобы обобщить этот результат на случай подсчета простых графов, построенных на n вершинах и имеющих ровно k компонент связности, $k = 1, \ldots, n$, достаточно вместо экспоненты использовать экспоненциальную производящую функцию $G(z,t)$ вида

$$G(z,t) = 1 + t\,\frac{z^1}{1!} + t^2\frac{z^2}{2!} + \ldots + t^n\frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

то есть производящую функцию, в которой в качестве коэффициентов b_n выбраны степени t^n произвольного параметра t. После этого достаточно для подсчета количества $g_n^{(k)}$ всех k-связных графов, построенных на n вершинах, воспользоваться соотношениями, полученными в пункте 3.2 пятого параграфа третьей главы.

2 Эйлеровы графы. Граф де Брейна

2.1. Наше краткое введение в теорию графов будет неполным, если мы не упомянем о самой первой задаче, возникшей в этой науке — задаче о кенигсбергских мостах, которая была предложена жителями города Кенигсберга (ныне — Калининграда) для решения Леонарду Эйлеру в тридцатых годах восемнадцатого века.

2.1.1. Вот как описывал постановку задачи сам Эйлер: “Некогда мне была предложена задача об острове, расположенном в городе Кенигсберге и окруженном рекой, через которую перекинуто семь мостов. Спрашивается, может ли кто-нибудь обойти их, переходя только однажды через каждый мост. И тут же мне было сообщено, что никто до сих пор не мог это проделать, но никто и не доказал, что это невозможно. Вопрос этот, хотя и банальный, показался мне, однако, достойным внимания тем, что для его решения недостаточны ни геометрия, ни алгебра, ни комбинаторное искусство...”. Эйлер не только решил эту задачу, но и установил необходимое условие, позволяющее определить, можно ли обойти любой город, имеющий мосты, так, чтобы пройти по всем мостам, не проходя дважды ни по одному из них.

2.1.2. Для решения задачи о кенигсберсгских мостах вслед за Эйлером нам следует, прежде всего, формализовать эту задачу. Именно, построим упрощенную схему города, заменяя части города точками — вершинами графа, а мосты — дугами, то есть ребрами этого графа: (см.рисунок). В результате мы придем к графу, изображенному на рис.1,в.

Теперь настало время дать несколько дополнительных определений.

Определение 2.1. Путь в графе называется *эйлеровым,* если он проходит через *каждое* ребро графа ровно один раз. Эйлеров путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине, называется *эйлеровым циклом.*

Определение 2.2. Любой граф, в котором существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом.* Граф, в котором существует эйлеров путь, называется *полуэйлеровым.*

Итак, нам нужно определить, является ли граф, изображенный на рис.1,в, эйлеровым. Эйлер ответил на этот вопрос отрицательно, доказав следующее необходимое условие существования эйлерова цикла в графе.

Теорема 2.3 (Необходимое условие существования эйлерова цикла в графе)**.** *Для того, чтобы в связном неориенированном графе существовал эйлеров цикл, необходимо, чтобы все вершины этого графа имели четную степень.*

Доказательство этого факта довольно несложно. Действительно, в эйлеровом цикле мы должны войти в любую вершину через одно ребро и выйти из него через другое. Следовательно, степень любой вершины должна быть четной. □

В графе, представленном на рис.1,в, имеются вершины нечетных степеней. Следовательно, эйлерова цикла в нем не существует.

2.1.3. Эйлер оставил без доказательства достаточность сформулированного им условия. Первое полное доказательство теоремы об эйлеровом цикле было дано немецким математиком Карлом Хиерхолцером лишь в 1873 году.

Теорема 2.4 (Достаточное условие существования эйлерова цикла в графе)**.** *Для того, чтобы граф имел эйлеров цикл, достаточно, чтобы он был связным и любая его вершина имела четную степень.*

Доказательство. Выберем произвольную вершину $x \in V(G)$ в графе G и будем совершать его обход, проходя по каждому ребру лишь один раз, до тех пор, пока мы не сможем двигаться дальше без нарушения этого условия. Так как любая вершина в графе имеет четную степень, то войдя в любую вершину графа, отличную от x, по одному из ребер, мы всегда сможем из нее выйти по какому-то другому ребру. Единственным исключением в этом смысле является сама вершина x: если мы вернемся в исходную вершину x, обойдя по разу каждое из инцидентных x ребер, то мы уже не сможем из нее выйти. Итак, процесс обхода неизбежно закончится в точке x.

Обозначим полученный в процессе такого обхода цикл через C_1. Если он совпал со всем графом, то все доказано — граф $G = C_1$ является эйлеровым. В противном случае у нас в графе остались какие-то ребра, через которые мы еще не прошли. Выберем в таком случае одну из вершин, принадлежащую C_1 и инцидентную одному из непройденных ранее ребер. Такая вершина $y \in C_1$ обязательно существует: в противном случае, выбирая любую вершину $z \notin C_1$, мы сразу получаем противоречие — в силу связности графа, существует путь, соединяющий точки $z \notin C$ и $x \in C$, одно из ребер которого не принадлежит C_1 и является инцидентным какой-то точке $y \in C_1$.

Рассмотрим теперь подграф $G \setminus C_1$, образованный ребрами, не вошедшими в цикл C_1. Повторим для него процедуру обхода, начиная с выбранной ранее точки y. Полученный в результате такого обхода цикл C_2 можно объединить с циклом C_1 в единый замкнутый цикл $C_1 \cup C_2$. Действительно, стартуя с точки $x \in C_1$, мы можем остановиться в точке $y \in C_1$, обойти весь цикл C_2, а затем продолжить обход по оставшейся части цикла C_1. Если теперь $C_1 \cup C_2 = G$, то все доказано. Если же нет, то нам следует продолжить процедуру до тех пор, пока полученный на k-м шаге цикл не совпадет со всем графом G. □

2.1.4. Итак, окончательно нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Связный граф G имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все степени его вершин четные.*

Из этой теоремы немедленно вытекает и следующее

Следствие 2.6. *Связный граф G имеет эйлеров путь, начинающийся в вершине $x \in V(G)$ и заканчивающийся в некоторой другой вершине $y \in V(G)$ тогда и только тогда, когда степени вершин x и y нечетные, а степени всех остальных вершин являются четными.*

Доказательство. Действительно, добавим к графу G еще одно дополнительное ребро, соединяющее точки x и y. Полученный в результате граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда исходный граф G имеет эйлеров путь, соединяющий точки x и y. Это обстоятельство и доказывает следствие 1.4. $\square$

Замечание 2.7. Полученные результаты достаточно легко перенести на случай орграфов. Именно, сильно связанный орграф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда входящая степень любой его вершины совпадает с исходящей степенью.

Замечание 2.8. Во многих практических задачах наряду с эйлеровыми циклами часто встречаются и так называемые гамильтоновы циклы — замкнутые пути, проходящие ровно один раз через каждую вершину графа. Несмотря на кажущуюся похожесть этих понятий, никаких простых критериев существования гамильтонова цикла в графе на настоящий момент не существует.

2.2. Перейдем теперь к задаче подсчета количества всех эйлеровых графов. Все, что для этого нужно — это подсчитать количество всех (в том числе и несвязных) графов, у которых любая вершина имеет четную степень (так называемых четных графов), а затем воспользоваться экспоненциальной формулой для подсчета односвязных компонент.

2.2.1. Приступим к решению первой задачи. В первом параграфе мы показали, что количество вершин нечетной степени в любом графе есть четное число (смотри Следствие 1.9 Теоремы 1.8). Этот факт позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех четных графов на n вершинах и множеством всех графов, построенных на $(n-1)$-й вершине.

Действительно, возьмем любой граф G, построенный на $(n-1)$-й вершине, добавим к нему еще одну, n-ю вершину и соединим ее со всеми вершинами графа G нечетной степени. В результате получим граф на n вершинах, у которого степень любой вершины четная.

Но количество g_n всех графов на n вершинах нам известно — оно равно $2^{\binom{n}{2}}$. Следовательно, количество всех четных графов равно $g_{n-1} = 2^{\binom{n-1}{2}}$.

2.2.2. Осталось подсчитать количество e_n эйлеровых графов, то есть *связных* графов, у которых степень любой вершины есть четное число. Нам известно, что если $Ei(z)$ есть экспоненциальная производящая функция для чисел e_n, а $G(z)$ — экспоненциальная функция для чисел g_{n-1} всех четных графов, то эти производящие функции связаны равенством

$$G(z) = \exp(Ei(z)) \qquad \Longrightarrow \qquad e_{n+1} = g_n - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} e_i\, g_{n-i} = 2^{\binom{n}{2}} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} e_i\, 2^{\binom{n-i}{2}}.$$

2.3. Как мы уже упоминали, эйлеровы графы встречаются в самых разнообразных практических задачах. В качестве очень красивого и полезного примера остановимся на одной из таких задач — задаче о последовательностях Де Брейна.

2.3.1. Формальная постановка задачи такова: найти наименьшую циклическую последовательность (циклическое слово) над алфавитом из n букв, содержащую все возможные подстроки длины k (так называемые k-меры). Рассмотрим, к примеру, случай $k = 3$ над алфавитом, состоящим из чисел 0 и 1. В таком случае любой тример — это одно из восьми первых двоичных чисел 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. В общем случае имеем n^k различных

k-меров. Расставляя все эти k-меры по кругу, мы, конечно же, получим циклическую последовательность длины $k \cdot n^k$, содержащую все возможные k-меры. Однако такое циклическое слово минимальным не будет. Так, для разобранного выше примера $k = 3$, $n = 2$ минимальной будет циклическая последовательность

$$00011101$$

длины $2^3 = 8$: она содержит все тримеры, причем каждый из них она содержит лишь по одному разу. Понятно, что циклическую последовательность длины меньшей, чем 2^3, построить невозможно — она не сможет содержать все 8 тримеров. Следовательно, есть подозрение, что и для произвольных n и k минимальная циклическая последовательность содержит ровно n^k символов. В этой связи возникают сразу три вопроса — как доказать это предположение, как понять, сколько таких минимальных строк существует, ну и наконец, как их всех найти.

На все эти вопросы дал ответ Николас де Брейн в своей работе 1946 года. Он для заданных n и k указал алгоритм построения всех так называемых n-арных последовательностей де Брейна $B(n, k)$ порядка k — циклических последовательностей над алфавитом из n символов, в каждой из которых любой возможный k-мер встречается ровно один раз, а также подсчитал общее число таких последовательностей. И сделал он это, построив для заданных n и k эйлеров орграф специального вида, который теперь называется графом де Брейна.

2.3.2. Алгоритм построения графа де Брейна следующий: возьмем в качестве вершин орграфа все возможные $(k-1)$-меры (их, очевидно, $n^{(k-1)}$ штук) и свяжем любые два из них ориентированным ребром в случае, если существует k-мер, префиксом которого является первый $(k-1)$-мер, а суффиксом — второй. На рисунке представлен построенный по этому алгоритму граф де Брейна для случая $n = 2$, $k = 4$.

Видно, что этот граф имеет петли в вершинах 000 и 111; оставшиеся вершины петель не имеют. Далее, видно, что как входящая, так и исходящая степень любой вершины равна двум. Следовательно, этот орграф действительно является эйлеровым. При этом любой эйлеров цикл в таком графе даст нам, очевидно, некоторую последовательность де Брейна. Так, помеченный на рисунке числами от 1 до 16 эйлеров цикл 0000, 0001, 0011, 0110, 1100, 1001, 0010, 0101, 1011, 0111, 1111, 1110, 1101, 1010, 0100, 1000 даст нам последовательность де Брейна 0000110010111101.

Итак, построив для любых n и k граф де Брейна, мы доказали существование соответствующей последовательности де Брейна. Далее, используя алгоритмы поиска эйлеровых циклов в орграфе, мы можем находить такие последовательности. Осталось понять, сколько всего таковых последовательностей существует. Де Брейн ответил и на этот вопрос, доказав, что их количество равно $(n!)^{n^{k-1}}/n^k$. Мы докажем этот результат в одном из последующих параграфов как частный случай еще одного важного утверждения — так называемой BEST-теоремы.

2.3.3. Заметим теперь, что предложенный де Брейном подход к решению поставленной задачи далеко не столь очевиден, как это кажется на первый взгляд. Гораздо более естественным представляется следующий подход: взять в качестве вершин графа не $(k-1)$-меры, а k-меры, и соединить любые две вершины направленным ребром в том случае, если $(k-1)$-мер, отвечающий суффиксу первой вершины, совпадает с $(k-1)$-мером, соответствующим префиксу второй. Полученный в результате такого подхода граф, построенный для случая $n = 2$ и $k = 3$, представлен на рис.... Все, что остается сделать — это найти в этом графе цикл, проходящий через все вершины этого графа ровно по одному разу. Иными словами, требуется построить гамильтонов цикл в таком графе.

Однако мы знаем, что задача поиска гамильтонова цикла в графе является значительно более сложной по сравнению с задачей поиска в графе эйлерова цикла. Во-первых, у нас, в отличие от эйлеровых графов, нет пригодного для любых входных данных критерия существования гамильтонова цикла в графе. Во-вторых, задача поиска гамильтонова цикла с алгоритмической точки зрения относится к классу NP-полных задач. Удовлетворительных алгоритмов решения таких задач на сегодняшний день не существует.

Основное достижение де Брейна как раз и состояло в правильной формализации поставленной задачи: благодаря его подходу удалось перейти от практически не решаемой задачи поиска гамильтоновых циклов в графе к сравнительно легкой задаче поиска эйлеровых циклов в графе.

2.3.4. Как это часто бывает в прикладной математике, задача, очень похожая на рассмотренную выше, возникла относительно недавно еще в одной, достаточно молодой области прикладной математики — в биоинформатике. Одной из наиболее актуальных задач в этой науке является задача ассемблирования (сборки) геномов из так называемых ридов (reads) — относительно коротких (содержащих порядка 100 нуклеотидов) строк над 4-буквенным алфавитом $\{$A,C,G,T$\}$, получаемых в результате секвенирования (разделения) генома (а точнее, очень большого количества одинаковых геномов). Один из самых первых методов сборки генома из таких ридов как раз и базировался на построении графа, вершинам которого сопоставлялись риды, а ребрам — перекрытия между этими ридами фиксированной длины. При этом исходный геном восстанавливался с помощью гамильтонова цикла в подобном графе.

Рассмотрим в качестве простейшего примера очень короткий циклический геном

$$\text{ATGGCGTGCA}$$

(рис....). Предположим, что в результате секвенирования мы получили из него пять относительно коротких ридов CGTGCAA, ATGGCGT, CAATGGC, GGCGTGC и TGCAATG. Соответствующий этой последовательности ридов граф показан на рисунке... Каждому из пяти ридов поставлена в соответствие одна из вершин этого графа. Две вершины соединяются ребром в случае, если ширина перекрытия соответствующих ридов составляет пять нуклеотидов (см. рисунок). Проход по гамильтонову циклу

$$\text{ATGGCGT} \to \text{GGCGTGC} \to \text{CGTGCAA} \to \text{TGCAATG} \to \text{CAATGGC} \to \text{ATGGCGT}$$

позволяет путем объединения первых двух нуклеотидов в каждом риде восстановить исходный геном ATGGCGTGCA.

Более современные методы сборки геномов обычно работают со строками определенной длины k (которые как раз и называются k-мерами), значительно более короткими, нежели исходные риды. Например, типичный 100-нуклеотидный рид разбивается вначале на 55-меры, длина перекрывающихся участков которых равна сорока шести. В нашем модельном примере каждый 7-нуклеотидный рид разбивается на пять 3-меров, перекрывающихся между собой по двум нуклеотидам (см. рисунок). Даже для этого примера найти соответствующий исходному геному гамильтонов цикл нелегко. В реальной же ситуации из одного генома в процессе секвенирования получают миллионы (10^6) ридов, триллионы (10^{12}) k-меров, то есть графы с огромным количеством вершин. Задача поиска гамильтонова цикла в таком графе практически нерешаема.

Павел Певзнер в 1989 году предложил для таких случаев использовать подход де Брейна. Переход от задачи поиска гамильтонова цикла в графе к задаче поиска эйлерова цикла существенным образом ускорил процесс ассемблирования геномов и стал общепринятым в большинстве современных ассемблеров, предназначенных для сборки генома из коротких ридов.

3 Двудольные графы, паросочетания. Теорема Холла

3.1. Довольно традиционной темой в любом курсе комбинаторики является набор фактов, связанных с двудольными графами и паросочетаниями в них. Большинство из них относится скорее к логической, нежели к перечислительной комбинаторике. Однако без этого раздела наше введение в комбинаторные методы теории графов было бы неполным.

3.1.1. Начнем с нескольких определений, связанных с понятиями раскраски вершин графа. При этом везде далее под графом будем понимать простой связный неориентированный граф.

Определение 3.1. Неформально раскраской вершин графа G называется разбиение множества V его вершин на блоки, называемые цветами. Более формально, это есть некоторая сюрьективная функция $\varphi : V \to C$, отображающая множество V вершин на некоторое множество C, называемое множеством различных цветов.

Определение 3.2. Раскраска вершин называется правильной, если вершины, окрашенные в один цвет, не соединены между собой ребрами.

Определение 3.3. Наименьшее количество цветов, в которое можно правильно покрасить вершины графа G, называется хроматическим числом $\chi(G)$ графа G.

Значение $\chi(G) = 1$ отвечает простейшему вырожденному случаю графа без ребер. Другой крайний случай — это полный граф K_n. Очевидно, что его хроматическое число $\chi(K_n) = n$.

Определение 3.4. Простой связный неориентированный граф G называется двудольным, если его хроматическое число $\chi(G) \leqslant 2$. Иными словами, граф называется двудольным, если множество V его вершин можно разбить на два блока так, чтобы любое ребро соединяло пару вершин, принадлежащих двум разным блокам.

3.1.2. Следующая теорема дает простой критерий двудольности графа.

Теорема 3.5. *Граф двудолен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных циклов.*

Доказательство. То, что в любом двудольном графе нечетные циклы отсутствуют, достаточно очевидно: в любом цикле вершины, окрашенные в цвета 1 и 2, чередуются, что невозможно сделать в случае, если этот цикл нечетный.

Докажем теперь, что если в G нет нечетных циклов, то его вершины мы всегда сможем раскрасить в два цвета. Для этого выберем любую вершину $v \in V(G)$ графа и покрасим ее в первый цвет. Разобъем затем множество V вершин на два блока V_1 и V_2 следующим образом: в первый блок включим все вершины u, для которых длина кратчайшего пути из v в u нечетна, а во второй — вершины, длина кратчайшего пути до которых из вершины v четна. В частности, сама вершина $v \in V_2$, а все смежные с ней вершины принадлежат подмножеству V_1. Все, что нам осталось — это убедиться в том, что такая раскраска является правильной.

Предположим противное, то есть предположим, что существует ребро $e = \{u, w\}$, такое, что обе вершины u и w принадлежат одновременно либо V_1, либо V_2. Обозначим через P и Q некоторые кратчайшие пути из вершины v в вершины u и w соответственно. Пусть $a \in V$ есть последняя *общая* вершина этих двух путей. Отметим, что длины участков путей P и Q из точки v в точку a обязаны совпадать — в противном случае один из двух путей P и Q не был бы оптимальным. Следовательно, участки путей P и Q от точки a к точкам u и

w имеют длины *одинаковой четности* и не имеют никаких других общих вершин, помимо a. Добавляя теперь к этим участкам путей P и Q ребро $e = \{u, w\}$, мы получаем в графе G цикл нечетной длины, то есть получаем противоречие. □

Замечание 3.6. Идея, лежащая в основе доказательства Теоремы 3.5, может быть также использована и для проверки заданного графа G на двудольность. Именно, выберем в таком графе произвольную вершину v и начнем обход всех оставшихся его вершин (например, с помощью алгоритмов поиска в глубину или в ширину), помечая их в процессе такого обхода поочередно как четные и нечетные. Если при этом ни в одной вершине конфликта не возникнет, то граф G окажется двудольным.

3.1.3. В случае $c > 2$ проверка неравенства $\chi(G) \leqslant c$ (то есть проверка возможности покрасить вершины графа в c цветов правильным образом) является значительно более сложной задачей. Такого простого описания, как в случае двудольных графов, для случая $c > 2$ нет — имеются лишь верхние оценки числа $\chi(G)$ через степени d вершин графа G.

В качестве примера сформулируем простейший результат такого рода.

Теорема 3.7. *Если наибольшая из степеней вершин графа G равна d, то G является $(d+$ $+1)$-раскрашиваемым.*

Доказательство. Выберем в графе G произвольную вершину v и покрасим ее в один из $(d+1)$ цветов. Затем начнем обходить все оставшиеся вершины графа, используя один из алгоритмов обхода графа (например, поиск в глубину). Каждая встречающаяся при таком обходе вершина имеет не более чем d соседей, окрашенных в не более чем d цветов. Следовательно, мы всегда сможем покрасить очередную вершину так, чтобы ее цвет был отличен от цветов ее соседей. □

Заметим, что доказанная в Теореме 3.7 оценка неулучшаема в случае полного графа $(G =$ $= K_{d+1},\ \chi(G) = d + 1)$, а также в случае циклического 2-регулярного графа нечетной длины $(G = C_{2k+1},\ \chi(G) = 3)$. Во всех остальных случаях эту оценку можно немного улучшить. Именно, справедлива следующая

Теорема 3.8 (Brooks, 1941)**.** *Пусть G есть простой связный граф, степени всех вершин которого не превосходят некоторого натурального числа $d \geqslant 3$. Предположим также, что в G не имеется ни одного подграфа, совпадающего с K_{d+1}. В этом случае $\chi(G) \leqslant d$.*

Доказательство этой теоремы можно посмотреть, например, в [].

3.1.4. В заключение этого пункта подсчитаем для заданного числа n вершин максимальное количество ребер, которое граф G может иметь, оставаясь двудольным.

Теорема 3.9. *Максимальное количество ребер в простом двудольном графе на n вершинах не превосходит $n^2/4$ в случае, когда число вершин четно, и $(n-1)^2/4$ в случае, когда это число нечетно.*

Доказательство. Выберем в качестве G такой простой двудольный граф на n вершинах, у которого количество ребер максимально. Иными словами, G — это такой двудольный граф, добавление к которому хотя бы одного ребра нарушит свойство двудольности. Очевидно, что в таком графе любая вершина v из первого блока V_1 должна быть соединена с *каждой* вершиной из второго блока V_2. Если бы это было не так, то есть если бы существовала вершина u из второго блока, еще не соединенная с v ребром, то мы смогли бы добавить к G еще одно ребро vu, а граф при этом остался бы двудольным. Тогда, если $|V_1| = a$, $|V_2| = b$, то $b = n - a$, а общее количество ребер равно $ab = a(n - a)$. Все, что остается сделать — это найти такое значение параметра a, при котором произведение $a(n - a)$ будет максимальным. □

Определение 3.10. Двудольные графы, у которых любая вершина из первого блока соединена с любой другой вершиной из второго блока, называются полными двудольными графами и обозначаются $K_{a,b}$, где $a = |V_1|$, $b = |V_2|$.

3.2. Перейдем теперь к очень полезному понятию паросочетания и его использованию различных комбинаторных задачах.

Определение 3.11. Паросочетанием M в произвольном графе называется любой набор ребер, не имеющих общих концевых вершин.

3.2.1. Мы, в основном, будем иметь дело с паросочетаниями в двудольном графе. Такого рода паросочетания достаточно часто встречаются на практике.

Пример 3.12. Пусть в группе имеется a студентов, которых необходимо распределить по b компаниям на летнюю практику. В этом случае мы можем ввести двудольный граф G с числом вершин $|V| = a + b$, ребра которого соединяют студента и компанию лишь в том случае, если квалификация студента удовлетворяет данную компанию, а сама компания, в свою очередь, устраивает данного студента. Пусть, кроме того, нам запрещено устраивать более одного студента в данную компанию. Последнее условие означает, что нам надо найти в построенном нами графе паросочетание. При этом, так как нам нужно *каждого* студента устроить на практику, то нам нужно найти в графе так называемое *насыщенное* паросочетание.

Определение 3.13. Паросочетание $M \subset E$ в двудольном графе G, разбитом на блоки V_1 и V_2, называется V_1-насыщенным, если любая вершина из первого блока входит в это паросочетание.

Основной результат, связанный с V_1-насыщенными паросочетаниями, известен как теорема Холла.

Теорема 3.14 (Ph.Hall, 1935). *Пусть G есть двудольный граф с блоками V_1 и V_2, $V = V_1 \cup V_2$. Рассмотрим произвольное подмножество U_1 множества V_1 вершин, лежащих в первом блоке, и обозначим через $N(U_1)$ подмножество лежащих в V_2 вершин, смежных со всеми вершинами из U_1. Тогда, если для любого подмножества U_1 его мощность $|U_1|$ меньше или равна мощности $|N(U_1)|$ соответствующего подмножества $N(U_1)$, то в G существует V_1-насыщенное паросочетание.*

Замечание 3.15. Неформально говоря, теорема Холла утверждает, что каждое подмножество $U_1 \subset V_1$ должно иметь достаточное количество смежных вершин в V_2. В частности, совершенно очевидно, что для существования V_1-насыщенного паросочетания необходимо выполнение условия $|V_1| \leqslant |V_2|$. Далее, понятно, что если в V_1 имеются две вершины степени 1, и если единственные выходящие из них ребра приходят в одну и ту же вершину из блока V_2, то V_1-насыщенного паросочетания в таком графе не существует. Теорема 2.1, по сути, обобщает два этих частных случая на общий случай произвольных подмножеств $U_1 \subset V_1$.

Замечание 3.16. Сразу заметим, что необходимость условия

$$|U_1| \leqslant |N(U_1)| \qquad\qquad \forall\, U_1 \subset V_1 \tag{2}$$

совершенно очевидна. Действительно, пусть существует хотя бы одно подмножество U_1, для которого условие (2) не выполняется. В этом случае не существует U_1-насыщенного паросочетания из U_1 в $N(U_1)$. Но это означает, что не существует и V_1-насыщенного паросочетания из

V_1 в V_2: все ребра, исходящие из подмножества U_1, приходят, по определению подмножества $N(U_1)$, в это самое подмножество $N(U_1)$, и поэтому правильно выбрать ребра, выходящие из подмножества U_1, нам уже не удастся вне зависимости от того, насколько успешно мы справились с задачей построения паросочетания из подмножества $V_1 \setminus U_1$. Так вот, теорема Холла — это есть уже не столь тривиальное утверждение, означающее достаточность условия (2).

Замечание 3.17. Теорему Холла часто называют также теоремой о деревенских свадьбах. Это название связано со следующей формулировкой этой задачи, восходящей к известному немецкому математику первой половины двадцатого века Герману Вейлю. В деревне относительно каждого юноши и девушки известно, дружат они или нет. Если для любых k юношей объединение подмножеств их подруг содержит по крайней мере k девушек, то каждый юноша может выбрать себе жену из числа своих же подруг.

3.2.2. Перейдем, наконец, к доказательству теоремы Холла. Пусть M есть некоторое произвольное паросочетание с числом ребер $|M| = m$, и пусть количество $|V_1|$ вершин в блоке V_1 равно a. Если $m = a$, то доказывать нечего — M является V_1-насыщенным паросочетанием. Поэтому предположим, что $m < a$. Наша задача — показать, что в этом случае мы всегда можем построить паросочетание M' с количеством $|M'|$ ребер, равных $m + 1$.

Так как $m < a$, то в блоке V_1 обязательно существует вершина u, не покрытая паросочетанием M. Рассмотрим множество $N(u)$ всех вершин из V_2, смежных с вершиной u. По условию теоремы, это множество не пусто, то есть в нем существует хотя бы одна вершина $v_1 \in V_2$. Если она не покрыта паросочетанием M, то, добавляя к M ребро $\{u, v_1\}$, мы получим паросочетание $M' = M \cup \{u, v\}$ с числом ребер $m + 1$. Если же она покрыта паросочетанием M, то существует ребро $\{v_1, v_2\} \in M$, второй конец которого — вершина v_2 — принадлежит блоку V_1. По условию теоремы, мощность множества $N(u, v_2)$ вершин, смежных как с u, так и с v_2, больше или равна двум. Поэтому в этом множестве наряду с $v_1 \in N(u, v_2)$ существует и еще хотя бы одна вершина — вершина v_3. Если она не покрыта паросочетанием M, то, заменяя в M ребро $\{v_1, v_2\}$ парой ребер $\{u, v_1\}$, $\{v_2, v_3\}$, мы получим новое паросочетание M' с количеством ребер, равных $m + 1$. Если же все вершины из множества $N(u, v_2)$ покрыты M, то выберем в этом множестве $N(u, v_2)$ произвольную вершину v_3, возьмем смежную с ней вершину $v_4 \in V_1$, такую, что $\{v_3, v_4\} \in M$, и повторим наши рассуждения для множества вершин $\{u, v_2, v_4\}$. Продолжая процесс далее, мы максимум за m таких шагов построим паросочетание M' с числом ребер, равных $m + 1$. $\square$

Замечание 3.18. Описанные выше рассуждения не только доказывают теорему Холла, но и дают конструктивный алгоритм построения V_1-насыщенного паросочетания в двудольном графе.

3.3. Перейдем теперь к подсчету количества всех двудольных графов на n вершинах [].

3.3.1. Обычная стратегия подсчета подобного рода объектов состоит в том, чтобы вначале сосчитать все объекты данного вида, а затем, пользуясь экспоненциальной формулой, вычислить количество связных объектов.

На первый взгляд кажется, что для подсчета числа всех двудольных графов на n вершинах следует разбить всеми $\binom{n}{k}$ способами n-множество вершин на два подмножества A и B, а затем подсчитать количество всех возможных двудольных графов для каждого из таких разбиений. Максимальное количество ребер для заданного разбиения равно, очевидно, $|A| \cdot |B|$, поэтому для каждого такого разбиения имеется $2^{|A|\cdot|B|}$ способов соединить или не соединить пару вершин из разных блоков ребром. Итого получается

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{|A|\cdot|B|} \tag{3}$$

способов совершить данные комбинаторные действия.

Однако в приведенных выше рассуждениях имеется одна неточность. Именно, при таком способе подсчета один и тот же двудольный граф встречается несколько раз. Действительно, пусть у нас имеется разбиение 5-элементного множества на блоки вида $\{1,3\}$ и $\{2,4,5\}$. В этом случае один и тот же связный двудольный граф получится, когда я в качестве блока A возьму первое подмножество, и когда я в качестве блока A выберу второе подмножество. В более общем случае двудольного графа, состоящего из k связных компонент, один и тот же двудольный граф появится в 2^k случаях. Действительно, для каждой связной компоненты C_i такого графа мы можем двумя способами выбрать, какой именно из двух блоков A_i и B_i этой компоненты нам следует приписать к подмножеству A, а какой — к подмножеству B графа $G = A \cup B$.

Следовательно, описываемые формулой (3) числа c_n перечисляют не двудольные графы, а двудольные двуцветные графы, то есть графы, в которых любая вершина покрашена в один из двух цветов, и в которых ребрами соединены лишь вершины разных цветов. Действительно, любой связный двудольный граф порождает два различных графа такого рода — в разобранном выше примере это граф, у которого подмножество $\{1,3\}$ выкрашено либо в один (красный), либо в другой (синий) цвет. В двудольном графе, состоящем из k связных компонент, существует ровно 2^k различных способов окраски блоков A_i и B_i, принадлежащих одной и той же компоненте связности.

3.3.2. Возникает вопрос: а зачем нам знать количество таких двуцветных графов? Ведь исходно мы хотели подсчитать не их количество, а число всех двудольных графов. Оказывается, тем не менее, что решив промежуточную задачу подсчета всех двуцветных двудольных графов, мы решим и исходную задачу.

Действительно, пользуясь экспоненциальной формулой, мы легко можем сосчитать количество всех связных двуцветных двудольных графов:

$$a_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i\, c_{n+1-i}.$$

Но таких графов ровно в два раза больше, чем всех связных двудольных графов, поэтому количество связных двудольных графов на n вершинах просто равно $a_n/2$.

Количество же всех (не обязательно связных) двудольных графов можно теперь сосчитать по той же экспоненциальной формуле, зная количество всех таких связных графов.

4 Деревья и их перечисление

4.1. Мы уже несколько раз в этом курсе встречались с понятием деревьев. Настала пора дать формальное определение этого понятия и установить основные связанные с ним свойства.

Определение 4.1. Деревом называется простой связный граф без циклов. Произвольный (не обязательно связный) простой граф без циклов называется лесом.

4.1.1. Приступим к изучению простейших свойств деревьев.

Определение 4.2. Вершина графа, имеющая единичную степень, называется листом.

Лемма 4.3. *У любого дерева T, построенного на $n \geqslant 2$ вершинах, имеется как минимум два листа.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный путь $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ максимальной длины в T. Его концы – вершины v_1 и v_k – обязаны быть листьями. Действительно, пусть, например, степень вершины v_k больше или равна двум. Это означает, что, помимо ребра $\{v_{k-1}, v_k\}$, из нее исходит еще по-крайней мере одно ребро. Очевидно, что это ребро не может соединять v_k ни с какой другой вершиной пути P — в противном случае мы бы получили в графе цикл. Следовательно, оно соединяет v_k с какой-то новой вершиной v_{k+1} графа T. Но в таком случае мы получаем в графе T путь $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\}$, длина которого на единицу больше длины пути P. А это, в свою очередь, противоречит тому, что путь P является максимальным. □

4.1.2. Пожалуй, основное свойство дерева описывается следующей теоремой.

Теорема 4.4. *Количество $|E|$ ребер в дереве ровно на единицу меньше количества $|V| = n$ его вершин:*

$$|E| = n - 1, \qquad |V| = n.$$

Доказательство проведем индукцией по количеству n вершин в графе. В случае $n = 1$ утверждение очевидно — дерево, состоящее из единственной вершины, не имеет ни одного ребра. Предположим теперь, что утверждение доказано для деревьев, построенных на n вершинах, и покажем, что оно остается верным для произвольного дерева с $(n+1)$-й вершиной.

Действительно, у любого такого дерева по лемме 1.1 имеется хотя бы один лист v. Удалим теперь этот лист v вместе с инцидентным с ним ребром e. Полученный в результате такой операции граф T' останется, очевидно, связным, и дополнительных циклов в нем также не появится. Следовательно, граф T' является деревом, построенным на n вершинах. Но у такого дерева по индукционному предположению имеется ровно $(n-1)$ ребер. Следовательно, у исходного дерева T имеется ровно n ребер. □

Замечание 4.5. Достаточно очевидно и обратное утверждение. Именно, любой связный граф G с n вершинами и $(n-1)$-м ребром является деревом.

Доказательство. Действительно, выберем в графе любую вершину и покрасим ее, например, в красный цвет. Затем будем последовательно выполнять следующие действия: выбираем в G произвольную вершину, смежную с одной из уже окрашенных вершин, и красим ее в красный цвет. Основной момент при этом состоит в том, что мы каждый раз к уже покрашенным вершинам будем добавлять какую-то новую вершину графа. Следовательно, в процессе таких действий циклы в окрашиваемом графе появиться не могут. Окрашивая за $(n-1)$ шагов все вершины графа G, мы и доказываем тем самым, что циклы в этом графе отсутствуют. □

Следствие 4.6. *Всякий связный граф, построенный на n вершинах, имеет не менее $(n-1)$-го ребра.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный связный граф. Если такой граф не является деревом, то у него имеется хотя бы один цикл. В этом цикле мы всегда можем удалить одно ребро, и граф при этом останется связным. Удаляя так ребра одно за другим, мы, наконец, получим связный граф без циклов, то есть дерево. Количество ребер у дерева равно $(n-1)$. Следовательно, у исходного графа имеется не менее $(n-1)$ ребер. □

Определение 4.7. Подграф H графа G называется остовным, если $V(H) = V(G)$.

Замечание 4.8. В свете последнего определения следствие к теореме можно переформулировать так: у всякого связного графа существует остовное дерево. Получить это дерево можно, либо удаляя лишние ребра, либо (что более рационально) используя алгоритм, использованный при доказательстве замечания к теореме. Этот алгоритм, называемый поиском в глубину, очень часто используется в разнообразных приложениях, связанных с теорией графов. Подробное описание этого алгоритма можно найти, например, в [].

4.1.3. Отметим в заключение еще одно важное свойство дерева — оно является минимально связным графом.

Определение 4.9. Простой связный граф называется минимально связным, если удаление любого ребра приводит к нарушению связности графа.

Теорема 4.10. *Граф T является деревом тогда и только тогда, когда он является минимально связным графом.*

Доказательство практически очевидно. Действительно, покажем, что любой минимально связный граф T является деревом. Предположим, что это не так, то есть в графе T имеется цикл. Но тогда мы можем удалить одно из ребер этого цикла, не нарушая связность графа T. Последнее же противоречит тому, что T — минимально связный граф.

Пусть теперь T является деревом. Если бы мы могли удалить в T ребро, соединяющее пару вершин u, v этого графа, не нарушив его связность, то это бы означало, что до удаления ребра $e = \{u, v\}$ в графе T имелось бы два пути, соединяющих u и v. Иными словами, в этом случае в исходном графе существовал бы цикл, чего быть не может. □

Следствие 4.11. *Граф T является деревом тогда и только тогда, когда для любых двух его вершин существует единственный соединяющий эти вершины простой путь.*

Доказательство. Пусть в T для любой пары вершин существует единственный соединяющий их простой путь. Тогда T является минимально связным графом. Действительно, если бы мы могли удалить ребро uv без нарушения связности T, то у исходного графа имелось бы как минимум два пути, соединяющих эти вершины, что невозможно.

Обратно, пусть T является деревом, и пусть в нем существуют два простых пути P и Q, соединяющих какую-то пару вершин u, v. Выделим в P и Q ребра, которые принадлежат P, но не принадлежат Q, и наоборот. Объединение таких ребер образует, очевидно, один или несколько циклов, что противоречит тому, что T является деревом. □

4.2. Перейдем теперь к перечислению всех помеченных деревьев, то есть деревьев, n вершин которых помечены различными целыми числами из диапазона от единицы до n.

4.2.1. Несложно убедиться, что существует по одному дереву, построенному на одной и на двух вершинах, а также три дерева, построенные на трех вершинах. Все эти три дерева отличаются друг от друга только расположением меток вершин. В случае $n = 4$ таких деревьев существует уже 16 штук — 12 деревьев, отвечающих линейной цепочке вершин, и 4 дерева, построенных на "треножнике". Задача этого пункта — доказать следующий общий результат, известный как формула Кэли.

Теорема 4.12 (Формула Кэли). *Количество a_n различных помеченных деревьев на n вершинах равно n^{n-2}.*

К настоящему моменту известно около 16 различных способов доказательства этого результата. Один из них, принадлежащий Андре Джойалу (André Joyal), будет подробно разобран в главе, посвященной теории комбинаторных видов. Второй, связанный с производящими функциями, мы рассмотрим в конце этого параграфа. Здесь же мы приведем доказательство, основанное на биекции между множеством всех деревьев и множеством всех числовых последовательностей длины $(n-2)$ — так называемых последовательностей Прюфера. Это доказательство было впервые предложено Хайнсом Прюфером (Heinz Prüfer) в 1918 году.

4.2.2. Рассмотрим вначале дерево T, вершины которого помечены элементами множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, и покажем, как сопоставить такому дереву последовательность чисел вида

$$P(T) = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}\}, \qquad y_i \in [n],$$

называемую последовательностью Прюфера. Для этого на первом шаге выберем среди всех листьев дерева $T = T_1$ вершину x_1 с минимальным номером, удалим эту вершину вместе с инцидентным ей ребром $e_1 = \{x_1, y_1\}$, а затем запишем y_1 в качестве первого члена нашей последовательности. Полученное в результате удаления ребра e_1 дерево обозначим через T_2. Теперь будем повторять этот процесс до тех пор, пока у нас не останется дерево T_{n-1}, состоящее ровно из двух вершин и соединяющего их ребра.

В качестве примера рассмотрим дерево T, изображенное на рисунке... Среди всех его листьев минимальный номер имеет вершина 3. Удаляя ребро $e_1 = \{3, 2\}$, мы получаем дерево T_2, а также первый член последовательности Прюфера, равный $y_1 = 2$. Среди листьев дерева T_2 минимальный номер имеет вершина 4. Ее удаление дает нам дерево T_3, а также второй член последовательности Прюфера, равный $y_2 = 2$. Продолжая этот процесс, на $(n-1)$-м шаге мы получаем дерево T_{n-1}, построенное на вершинах 10 и 9, а также последовательность Прюфера

$$P(T) = \{2, 2, 1, 1, 7, 1, 10, 10\}.$$

4.2.3. Докажем теперь, что отображение, сопоставляющее каждому дереву T числовую последовательность $P(T)$, взаимно-однозначно. Для этого нам достаточно показать, что по любой из n^{n-2} возможных последовательностей Прюфера мы однозначно можем восстановить какое-то дерево T.

Заметим, прежде всего, что в последовательности Прюфера $P(T)$ любая вершина x_i, $i = 1, \ldots, n$, встречается ровно $\deg_T(x_i) - 1$ раз. В частности, листья исходного дерева T в этой последовательности не встречаются вовсе.

Рассмотрим теперь дерево T_k, отвечающее k-му шагу алгоритма. По построению, оно у нас состоит из вершин $x_k, \ldots, x_{n-1}, x_n \equiv n$, а также из ребер $\{x_k, y_k\}, \ldots, \{x_{n-2}, y_{n-2}\}, \{x_{n-1}, n\}$. При этом любая вершина x_i дерева T_k встречается в числовой последовательности $\{y_k, \ldots, y_{n-2}, n\}$ ровно $\deg_{T_k} -1$ раз. В частности, листья дерева T_k в такую последовательность не входят. Поэтому листья в таком дереве — это те вершины, которые не встречаются в числовой последовательности $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \cup \{y_k, \ldots, y_{n-2}, n\}$.

Обозначим через L_k множество всех листьев дерева T_k, то есть множество вершин, не вошедших в числовую последовательность $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \cup \{y_k, \ldots, y_{n-2}, n\}$. Выберем наименьшее из чисел множества L_k. По построению, это число отвечает вершине x_k дерева T_k. Действительно, эта вершина будет удалена на k-м шаге как наименьшая среди всех листьев дерева T_k. В частности, x_1 — это наименьший элемент множества $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ чисел, не вошедших в последовательность Прюфера $P(T)$. В рассмотренном выше примере $x_1 = 3$. Теперь, зная на каждом шаге последовательности чисел $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ и $\{y_k, \ldots, y_{n-2}, n\}$, мы сможем восстановить все числа x_k. Имея же две числовые последовательности $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и $\{y_1, \ldots, y_{n-2}, n\}$, мы легко сможем построить исходное дерево T. $\square$

4.2.4. Итак, мы сумели сосчитать количество всех помеченных деревьев. Возникает вопрос — как получить тот же результат с помощью производящих функций. Оказывается, что в этом случае нам будет удобнее начать с перечисления так называемых корневых помеченных деревьев.

Определение 4.13. Корневым помеченным деревом называется помеченное дерево, в котором одна из вершин выделена и рассматривается как корень этого дерева.

Так как любую из вершин дерева можно выбрать в качестве его корня, то количество t_n корневых деревьев в n раз больше количества a_n всех деревьев: $t_n = n \cdot a_n = n^{n-1}$. Наша задача — построить производящую функцию $T(z)$ для последовательности t_n.

Для решения этой задачи заметим, что любое корневое дерево на $n > 1$ вершинах я могу построить так: выбрать любую из этих n вершин в качестве корня, разбить оставшееся множество $(n-1)$ вершин на заранее не определенное количество m непустых неупорядоченных блоков, построить на каждом из этих блоков размером i_m корневое дерево t_{i_m} числом способов, а затем соединить ребрами корни каждого из таких деревьев с выделенной на первом этапе вершиной. На языке производящих функций это означает, что производящая функция $T(z)$ удовлетворяет следующему функциональному соотношению:

$$T(z) = z \cdot \exp(T(z)). \tag{4}$$

Все, что теперь осталось — научиться решать функциональное уравнение (4). Технике решения этого и подобных ему рекурсивных уравнений посвящен следующий параграф.

5 Формула обращения Лагранжа

5.1. Вернемся к теории формальных степенных рядов, основные понятия которой были изложены в первом параграфе второй главы.

5.1.1. Рассмотрим кольцо $K[[x]]$ формальных степенных рядов вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

и выделим в нем множество $z\,K[[z]]$ формальных степенных рядов с нулевым свободным членом. На таком множестве, как мы уже знаем, можно ввести операцию композиции $g(f(z))$. Несложно убедиться в том, что эта операция ассоциативна, и что для нее существует нейтральный элемент, равный z. Следовательно, множество $z\,K[[z]]$ с введенной на нем бинарной операцией композиции образует моноид (полугруппу с единицей) относительно этой операции.

Определение 5.1. Формальный степенной ряд $g(z)$ называется обратным к $f(z) \in z\,K[[z]]$ (в смысле композиции), если

$$g(f(z)) = f(g(z)) = z.$$

Оказывается, не все элементы множества $z\,K[[z]]$ имеют обратный (как следствие, $z\,K[[z]]$ вместе с введенной на нем операцией композиции группой не является). Следующая простая теорема дает необходимое и достаточное условие существования обратного к $f(z)$ в смысле композиции элемента $g(z) \in z\,K[[z]]$.

Теорема 5.2. *Формальный степенной ряд*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

имеет обратный ряд $g(z)$ тогда и только тогда, когда коэффициент a_1 отличен от нуля. При этом такой обратный элемент $g(z)$ единственен.

Доказательство. Предположим, что формальный степенной ряд

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

удовлетворяет равенству $g(f(z)) = z$, или, более подробно,

$$b_1(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) + b_2(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^2 + b_3(a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)^3 + \ldots = z.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, мы получаем бесконечную цепочку линейных уравнений на коэффициенты b_n вида

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= 1, \\ a_2 b_1 + a_1^2 b_2 &= 0, \\ a_3 b_1 + 2a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{5}$$

из которой (при условии, что $a_1 \neq 0$) последовательно и однозначно можно найти коэффициенты $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

Аналогичные рассуждения показывают, что и в случае $f(g(z)) = z$ коэффициенты b_n определяются по тем же самым формулам. Иными словами, в случае $a_1 \neq 0$ формальный степенной ряд $g(z)$, удовлетворяющий соотношениям $g(f(z)) = f(g(z)) = z$, существует и единственен. □

5.1.2. Теорема 5.2 вместе с формулой (4) уже позволяют нам подсчитать количество корневых помеченных деревьев. Действительно, введем формальные степенные ряды вида

$$t(z) := \widehat{t}_1 z + \widehat{t}_2 z^2 + \widehat{t}_3 z^3 + \ldots, \qquad \widehat{t}_n = \frac{t_n}{n!},$$

$$e(z) := e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + e_3 z^3 + \ldots, \qquad e_n = \frac{1}{n!}.$$

В этих обозначениях формула (4) переписывается так:

$$t(z) = z \cdot e(t(z)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{t(z)}{e(t(z))} = z. \tag{6}$$

Определим теперь формальный степенной ряд $g(z) \in z\,K[[z]]$ по формуле

$$g(z) = \frac{z}{e(z)}.$$

С учетом этого обозначения формула (6) может быть переписана в следующем виде:

$$g(t(z)) = z.$$

Несложно проверить, что

$$g(z) = z - z^2 + \frac{1}{2!}z^3 - \frac{1}{3!}z^4 + \ldots$$

Зная коэффициенты этого ряда, можно с помощью цепочки равенств (5) последовательно сосчитать числа $\widehat{t_n}$, а следовательно, и количество t_n всех корневых помеченных деревьев, построенных на n вершинах:

$$\begin{aligned}
z^1 :&\quad \widehat{t_1} = 1 &&\Longrightarrow\ \widehat{t_1} = 1 &&\Longrightarrow\ t_1 = 1! \cdot 1 = 1,\\
z^2 :&\quad -\widehat{t_1} + \widehat{t_2} = 0 &&\Longrightarrow\ \widehat{t_2} = 1 &&\Longrightarrow\ t_2 = 2! \cdot 1 = 2,\\
z^3 :&\quad \widehat{t_1}/2 - 2\widehat{t_2} + \widehat{t_3} = 0 &&\Longrightarrow\ \widehat{t_3} = 3/2 &&\Longrightarrow\ t_3 = 3! \cdot 3/2 = 9, \quad \ldots
\end{aligned}$$

5.2. Итак, нам удалось из формулы (4) получить рекуррентные соотношения для подсчета количества всех помеченных корневых деревьев. Нам же хочется большего — доказать, что из этой формулы следует известное нам явное выражение $t_n = n^{n-1}$ для количества таких деревьев. Для достижения этой цели нам вновь придется вернуться к теории формальных степенных рядов.

5.2.1. Кольцо формальных степенных рядов $K[[z]]$ удобно иногда рассматривать как вложение в некую более широкую алгебраическую структуру — поле $K((z))$ формальных рядов Лорана вида

$$\varphi(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

то есть формальных степенных рядов, имеющих конечное число слагаемых с отрицательными степенями z. Для читателей, знакомых с теорией алгебраических структур, следует отметить, что $K((z))$ можно рассматривать как поле частных кольца $K[[z]]$ (см., например, []).

Определение 5.3. Коэффициент a_{-1} при z^{-1} в ряде Лорана $\varphi(z) \in K((z))$ называется *вычетом* ряда $\varphi(z)$ и обозначается как $\operatorname{Res}(\varphi(z))$.

Теорема 5.4 (Лагранж). *Пусть*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots, \qquad b_1 \neq 0,$$

есть пара формальных степенных рядов, взаимно-обратных по отношению к операции композиции, то есть таких, что $f(g(z)) = g(f(z)) = z$. *Тогда коэффициент* b_n *равен вычету формального ряда Лорана* $\varphi(z) = 1/(n \cdot f^n(z))$:

$$b_n := [z^n]\, g(z) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{n\, f^n(z)}\right) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{f^n(z)}. \tag{7}$$

Доказательство. Распишем подробнее равенство $g(f(z)) = z$:

$$b_1 f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots + b_n f^n(z) + \ldots = z.$$

Дифференцируя последнее соотношение по z, получаем

$$b_1 f'(z) + 2b_2 f(z) f'(z) + \ldots + n b_n f^{n-1}(z) f'(z) + \ldots = 1.$$

Теперь поделим полученное равенство на $f^n(z)$:

$$b_1 \frac{f'(z)}{f^n(z)} + 2b_2 \frac{f'(z)}{f^{n-1}(z)} + \ldots + n\, b_n \frac{f'(z)}{f(z)} + (n+1)\, b_{n+1} f'(z) + \ldots = \frac{1}{f^n(z)}. \tag{8}$$

Сосчитаем коэффициент при z^{-1} в левой части равенства (8). Оказывается, ненулевой вклад в коэффициент при z^{-1} может давать только слагаемое $n\, b_n\, f'(z)/f(z)$, а вклад от остальных слагаемых в этот коэффициент равен нулю.

Действительно, для любых $k \neq 1$ выражение вида $f^k(z)\, f'(z)$ можно переписать в виде

$$f^k(z) \cdot f'(z) = \frac{1}{k+1} (f^{k+1}(z))', \qquad k = -n, -n+1, \ldots, -2, 0, 1, 2, \ldots$$

Заметим теперь, что если функция $\varphi(z) \in K((z))$, то есть представляет собой формальный ряд Лорана

$$\varphi(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-n+1}}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots,$$

то производная такого ряда имеет вид

$$\varphi'(z) = -n \frac{c_{-n}}{z^{n+1}} - (n-1) \frac{c_{-n+1}}{z^n} - \ldots - \frac{c_{-1}}{z^2} + c_1 + 2c_2 z + \ldots$$

Иными словами, вычет функции $\varphi'(z) = 0$ для любой $\varphi(z) \in K((z))$. Как следствие, все коэффициенты при z^{-1} в слагаемых вида $f^k(z)\, f'(z)$ в случае $k \neq -1$ действительно равны нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что коэффициент при z^{-1} в выражении

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots}{a_1 z + a_2 z^2 + \ldots} = \frac{1}{z} \left[\frac{1 + 2\frac{a_2}{a_1} z + \ldots}{1 + \frac{a_2}{a_1} z + \ldots} \right]$$

равен единице. Действительно, это означает, что коэффициент при z^{-1} в левой части равенства (8) равен $n\, b_n$, то есть коэффициент b_n действительно равен деленному на n вычету стоящей в правой части (8) функции $1/f^n(z)$. $\square$

5.2.2. При перечислении деревьев мы пришли к уравнению (6), являющемуся частным случаем уравнения вида

$$g(z) = z \cdot r(g(z)). \tag{9}$$

в котором

$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots, \qquad b_1 \neq 0, \qquad r(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad a_0 \neq 0. \tag{10}$$

Такие уравнения довольно часто встречаются на практике, поэтому имеет смысл сформулировать для них утверждение, аналогичное (7).

Следствие 5.5. *Пусть два формальных степенных ряда (10) связаны между собой соотношением (9). Тогда коэффициенты b_n формального степенного ряда $g(z)$ выражаются через коэффициенты ряда $r(z)$ по формулам*

$$b_n := [z^n]\, g(z) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] r^n(z). \tag{11}$$

Доказательство. Переписывая уравнение (9) в виде

$$\frac{g(z)}{r(g(z))} = z$$

и вводя функцию $f(z) = z/r(z)$, мы вместо (9) получаем уравнение

$$f(g(z)) = z = g(f(z)).$$

Теперь мы для определения коэффициентов b_n можем воспользоваться формулой Лагранжа (7):

$$b_n = [z^n]g(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{1}{f^n(z)}.$$

Вспоминая, что $f(z) = z/r(z)$, мы последнюю формулу можем переписать так:

$$b_n = [z^n]g(z) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{r^n(z)}{z^n}.$$

Для доказательства (11) осталось заметить, что если

$$\varphi(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + \ldots = \frac{r^n(z)}{z^n} =: \frac{1}{z^n}[\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 z + \ldots + \widehat{a}_{n-1}z^{n-1} + \widehat{a}_n z^n + \ldots],$$

то коэффициент c_{-1} при z^{-1} совпадает с коэффициентом $\widehat{a}_{n-1}$ в правой части последнего равенства:

$$\operatorname{Res}(\varphi(z)) = c_{-1} = \operatorname{Res}\left(\frac{r^n(z)}{z^n}\right) = \widehat{a}_{n-1} = [z^{n-1}]r^n(z).$$

□

Замечание 5.6. Помимо формальных, существуют и чисто комбинаторные доказательства равенства (11). Одно из таких доказательств, основанное на теории комбинаторных видов, можно посмотреть в [].

5.2.3. В качестве приложения доказанного выше результата (11) получим, наконец, с помощью равенства (4) количество всех корневых помеченных деревьев.

В этом частном случае $b_n = \widehat{t}_n$, $r(z) = e(z)$,

$$e^n(z) = 1 + nz + \frac{n^2}{2!}z^2 + \ldots + \frac{n^n}{n!}z^n + \ldots,$$

и потому

$$\widehat{t}_n = \frac{1}{n}[z^{n-1}]e^n(z) = \frac{1}{n}n^{n-1}(n-1)! = \frac{n^{n-1}}{n!} \qquad \Longrightarrow \qquad t_n = n^{n-1}.$$

5.2.4. В параграфе, посвященном экспоненциальной формуле, мы упоминали, что если экспоненциальная производящая функция $F(z)$ перечисляет некоторые односвязные структуры, то функция вида $[F(z)]^k/k!$ перечисляет соответствующие k-связные структуры. С этой точки зрения полезным оказывается следующее обобщение теорем (7) и (11).

Теорема 5.7. *Пусть*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad a_1 \neq 0,$$
$$g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n + \ldots, \qquad b_1 \neq 0,$$

есть пара формальных степенных рядов, взаимно-обратных по отношению к операции композиции, то есть таких, что $f(g(z)) = g(f(z)) = z$. *Тогда коэффициент при* z^n *у функции* $g^k(z)$ *равен вычету формального ряда Лорана* $\varphi(z) = kz^{k-1}/(n \cdot f^n(z))$ *:*

$$[z^n]\, g^k(z) = \mathrm{Res}\left(\frac{kz^{k-1}}{n\, f^n(z)}\right) = \frac{1}{n}[z^{-1}]\frac{kz^{k-1}}{f^n(z)}. \tag{12}$$

В случае же, когда формальные степенные ряды вида (10) связаны равенством $g(z) = z \cdot$ $\cdot\, r(g(z))$ *, соответствующий коэффициент вычисляется по формуле*

$$[z^n]\, g^k(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]r^n(z). \tag{13}$$

Доказательство этих равенств практически полностью повторяют доказательство теоремы Лагранжа (7) и его следствия (11).

В качестве примера вновь вернемся к корневым помеченным деревьям. В этом случае

$$[z^n]t^k(z) = \frac{k}{n}[z^{n-k}]e(nz) = \frac{k}{n} \cdot \frac{n^{n-k}}{(n-k)!},$$

поэтому количество k-компонентных корневых помеченных деревьев на n-элементном множестве вершин равно

$$\frac{n!}{k!} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}.$$

5.2.5. Формула (7) была получена Лагранжем в конце XVIII века как результат решения задачи о построении функции, обратной данной. Именно, пусть у нас имеется функция

$$y = f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Требуется построить обратную к ней функцию

$$x = g(y) = b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

Так как $y = f(x)$, то задача эквивалентна нахождению коэффициентов b_n ряда $g(z)$ по коэффициентам a_n ряда $f(z)$ при условии, что эти ряды связаны равенством вида $z = g(f(z))$.

Данная задача была обобщена современником Лагранжа Гансом Бурманом (Hans Bürmann). Бурман захотел построить разложение заданной функции $G(z)$ в ряд

$$G(z) = b_0 + b_1 f(z) + b_2 f^2(z) + \ldots + b_n f^n(z) + \ldots$$

по степеням известной функции $f(z)$. В частном случае

$$G(z) = z, \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

мы приходим к задаче Лагранжа об обращении заданной функции $y = f(x)$. Бурман показал, что в более общей постановке произвольной функции $G(z)$ коэффициенты b_n определяются по формулам

$$b_n = \frac{1}{n!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ G'(z) \frac{z^n}{f^n(z)} \right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

В XX веке выяснилось, что и такая более общая задача имеет многочисленные приложения в комбинаторике (смотри, например, []).

6 Комбинаторика перестановок

6.1. Вернемся к композиционной формуле, которую мы вывели в конце прошлой главы.

6.1.1. Напомним, что если мы в этой формуле возьмем $a_n = b_n = 1$, $n \geqslant 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, то в результате композиции двух экспоненциальных производящих функций

$$F(z) = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots \qquad \text{и} \qquad G(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

мы получим экспоненциальную производящую функцию

$$B(z) = G(F(z)) = B_0 + B_1\frac{z}{1!} + B_2\frac{z^2}{2!} + \dots,$$

коэффициенты B_n которой, называемые числами Белла, описывают количество способов разбить всеми возможными способами n-элементное множество на непустые неупорядоченные блоки. Если в композиционной формуле мы в качестве b_k возьмем выражения t^k, то тогда вместо $B(z)$ мы получим экспоненциальную производящую функцию

$$H(z,t) = G(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, t^k\right)\frac{z^n}{n!},$$

коэффициенты $S(n,k)$ которой, представляющие собой числа Стирлинга второго рода, описывают количество способов разбить n-множество ровно на k неупорядоченных непустых блоков. Наконец, если мы в качестве a_n выберем переменные x_n, то мы в разложении

$$H(z,t) = G(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k B_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1})\right)\frac{z^n}{n!}$$

получим в качестве коэффициентов при $t^k z^n/n!$ так называемые полиномы Белла

$$B_{n,k}(x_1,\dots,x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k \\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_{n-k+1}!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\dots\left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{k_{n-k+1}},$$

коэффициенты при $x_1^{k_1}\dots x_{n-k+1}^{k_{n-k+1}}$ которых дают нам количество способов разбить n-элементное множество на k блоков, таких, что в разбиении присутствует ровно k_1 блок мощности 1, ровно k_2 блоков мощности 2 и так далее.

6.1.2. Теперь предположим, что мы хотим не просто разбить n-множество на блоки, но и циклически упорядочить элементы в каждом блоке. Мы знаем, что существует

$$a_n = (n-1)!, \qquad n = 1,2,\dots; \qquad a_0 = 0$$

способов циклически упорядочить n-множество. Тогда, взяв в композиционной формуле $b_n = 1$, $n = 0,1,2,\dots$, и $a_n = (n-1)!$, $n = 1,2,\dots$, мы получим производящую функцию вида

$$C(z) = C_0 + C_1\frac{z}{1!} + C_2\frac{z^2}{2!} + \dots = \exp\Bigl(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2} + \dots\Bigr).$$

Вспоминая теперь, что
$$z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2}\ldots=\ln\frac{1}{1-z},$$
мы окончательно получаем для $C(z)$ следующее представление:
$$C(z)=\exp\Bigl(\ln\frac{1}{1-z}\Bigr)=\frac{1}{1-z}=1+1!\frac{z}{1!}+2!\frac{z^2}{21}+\ldots+n!\frac{z^n}{n}+\ldots$$
Иными словами, мы получили, что количество C_n разбить всеми возможными способами n-элементное множество на блоки, а затем циклически упорядочить элементы в каждом блоке, равно $n!$.

Но мы знаем, что $n!$ есть количество всех возможных перестановок n-элементного множества. Как же нам интерпретировать предыдущий результат с учетом этого знания?

Дело в том, что любую перестановку можно представить (записать) в виде произведения нескольких более простых перестановок, называемых циклами. Например, перестановку
$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$
можно записать в виде циклов
$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&2&3\end{pmatrix},$$
а перестановку
$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$
можно представить в виде произведения пары циклов $(1\ 4)(2\ 3)$:
$$\tau=(1\ 4)\,(2\ 3)=(2\ 3)\,(1\ 4)=(4\ 1)\,(2\ 3)=\ldots$$
Но ведь это, по сути, означает, что для задания любой перестановки мы должны совершить следующее комбинаторное действие: разбить n-элементное множество $[n]$ на блоки, а затем задать в каждом блоке циклическую структуру, то есть циклически упорядочить элементы в каждом блоке. Именно поэтому количество всех возможных способов совершить вышеуказанные действия совпадает с количеством всех перестановок, а $C(z)=\exp[\ln(1/(1-z))]$ представляет собой экспоненциальную производящую функцию для чисел $n!$.

6.1.3. Кажется немного странным использовать столь мощную технику для получения столь простого результата. Однако, как мы сейчас увидим, уже на следующем шаге мы с ее использованием получим значительно более содержательные результаты.

Именно, по аналогии с задачей о разбиении n-множества на блоки, положим теперь в композиционной формуле
$$a_n=(n-1)!,\qquad n=1,2,\ldots,\qquad\qquad b_n=t^n,\qquad n=0,1,2,\ldots$$
Согласно общей теории, коэффициенты $c(n,k)$ при $t^kz^n/n!$ в разложении производящей функции
$$C(z,t)=G(F(z))=\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n}c(n,k)\,t^k\Bigr)\frac{z^n}{n!}$$

по степеням t и z дадут нам количество способов разбить n-элементное множество ровно на k блоков, а затем циклически упорядочить элементы в каждом блоке. На языке перестановок это есть количество перестановок, имеющих ровно k циклов.

Коэффициенты $c(n,k)$, называемые числами Стирлинга первого рода, столь широко используются как в комбинаторике, так и в других разделах математики, что заслуживают отдельного рассмотрения.

6.2. Запишем явное выражение для производящей функции, описывающей числа Стирлинга первого рода:
$$C(z,t) = \exp\Bigl(t \cdot \ln \frac{1}{1-z}\Bigr) = \Bigl(\frac{1}{1-z}\Bigr)^t = \frac{1}{(1-z)^t}. \tag{14}$$
С использованием этой функции выводится множество полезных свойств чисел Стирлинга первого рода.

6.2.1. Выведем, к примеру, рекуррентное соотношение для этих чисел. Начнем с граничных условий. По определению, $c(0,0)=1$. Далее, ясно, что $c(n,0)=0$ для $n>0$ — нельзя непустое множество разбить на ноль блоков. Очевидно также, что $c(n,n)=1$ — единственному разбиению n на n блоков отвечает тождественная перестановка. Наконец, понятно, что $c(n,k)=0$ для всех $k>n$.

Вернемся к производящей функции
$$C(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Biggl(\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\,t^k\Biggr)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^n}{n!}.$$
Производная по z этого ряда имеет вид
$$\frac{\partial C}{\partial z} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!}.$$
С другой стороны,
$$C(z,t) = \frac{1}{(1-z)^t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{t}{(1-z)^{t+1}} = \frac{t}{1-z}C(z,t) \qquad \Longrightarrow \qquad (1-z)\frac{\partial C}{\partial z} = t\,C(z,t).$$
Последнее равенство можно переписать так:
$$(1-z)\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} = t\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^n}{n!} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_{n+1}(t)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + t\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,c_n(t)\frac{z^n}{n!} + t\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^n}{n!}.$$
Следовательно,
$$c_{n+1}(t) = n\cdot c_n(t) + t\cdot c_n(t), \qquad n=0,1,2,\ldots$$
Отсюда уже легко получить рекуррентное соотношение для чисел $c(n,k)$:
$$\sum_{k=0}^{n+1} c(n+1,k)\,t^k = n\sum_{k=0}^{n} c(n,k)\,t^k + \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\,t^{k+1} \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} c(n+1,k)\,t^k = n\sum_{k=1}^{n+1} c(n,k)\,t^k + \sum_{k=1}^{n+1} c(n,k-1)\,t^k$$

Следовательно,

$$c(n+1,k) = n\cdot c(n,k) + c(n,k-1), \qquad k = 1,2,\ldots,n+1, \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{15}$$

$$c(0,0) = 1, \qquad c(n,0) = 0 \quad \forall\, n = 1,2,\ldots, \qquad c(n,k) = 0 \quad \forall\, k > n.$$

6.2.2. Получим теперь рекуррентное соотношение (15) непосредственно из элементарных комбинаторных рассуждений. Для этого разобъем все множество перестановок $(n+1)$-го множества перестановок, содержащих ровно k циклов, на два блока. В первый блок мы поместим все перестановки, в которых элемент $(n+1)$ содержится в цикле длины 1. Во втором блоке у нас будут все перестановки, в которых этот элемент содержится в циклах длины, большей единице.

Очевидно, что количество перестановок в первом блоке равно $c(n,k-1)$. Покажем, что количество элементов во втором блоке равно $n\cdot c(n,k)$.

Действительно, любая перестановка из второго блока может быть получена добавлением числа $(n+1)$ в один из k циклов перестановки n-элементного множества. Всего имеется $c(n,k)$ таких перестановок. Заметим теперь, что в любой из циклов длины n_i число $(n+1)$ можно вставить ровно n_i числом способов. Всего же, таким образом, имеется $n_1+\ldots+n_k = n$ способов вставить число $(n+1)$ в перестановку первых n чисел. □

6.2.3. Получим с помощью производящей функции

$$C(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{(1-z)^t}$$

еще одно чрезвычайно полезное соотношение для чисел $c(n,k)$. Воспользуемся для этого формулой бинома Ньютона:

$$\frac{1}{(1-z)^t} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-t)(-t-1)\ldots(-t-n+1)}{n!}(-1)^n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t\cdot(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!} z^n.$$

Сравнивая последние равенства, получаем, что

$$c_0(t) \equiv 1, \qquad c_n(t) := \sum_{k=0}^{n} c(n,k)t^k = t\cdot(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1) =: t^{\bar{n}} \equiv (t)^n, \quad n > 0. \tag{16}$$

Числа $t^{\bar{n}} \equiv (t)^n$ называются возрастающими факториальными числами. Мы, таким образом, показали, что числа Стирлинга первого рода $c(n,k)$ есть коэффициенты в разложении возрастающего факториального числа $t^{\bar{n}}$ по степеням t^k.

6.2.4. Числа $c(n,k)$ называются иногда числами Стирлинга первого рода без знака. Наряду с этими числами также вводятся так называемые числа $s(n,k)$ Стирлинга первого рода со знаком

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}c(n,k) = (-1)^{k-n}c(n,k).$$

Заменим в формуле (16) t на $(-t)$:

$$c_n(-t) := \sum_{k=0}^{n} c(n,k)(-1)^k t^k = (-1)^n t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1).$$

Домножая левую и правую часть последнего равенства на $(-1)^n = (-1)^{n-2k}$, получим

$$(-1)^n c_n(-t) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k = t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1) =: t^{\underline{n}} \equiv (t)_n.$$

Числа $t^{\underline{n}} \equiv (t)_n$ называются убывающими факториальными числами, а числа $s(n,k)$ Стирлинга первого рода со знаком представляют собой, таким образом, коэффициенты в разложении убывающего факториального числа по степеням t^k.

6.2.5. Вспомним, наконец, что числа Стирлинга второго рода $S(n,k)$ появлялись в разложении вида

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(t)_k.$$

Сравнивая это соотношение с формулой

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\,t^k,$$

мы видим, что числа $S(n,k)$ и $s(n,k)$ взаимно-обратны в следующем смысле:

$$\sum_{i=k}^{n} S(n,i)\cdot s(i,k) = \sum_{k=0}^{k} s(n,i)\cdot S(i,k) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n=k, \\ 0, & n\neq k. \end{cases} \tag{17}$$

Действительно,

$$(t)_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)\,t^i = (t)_n = \sum_{i=0}^{n} s(n,i)\,\sum_{k=0}^{i}(t)_k\cdot S(i,k) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{i=k}^{n} s(n,i)\cdot S(i,k)\right\}(t)_k.$$

С алгебраической точки зрения равенства (17) можно трактовать следующим образом. Пусть у нас имеются два базиса в пространстве функций: степенной базис $\{1,t,t^2,\ldots,t^n,\ldots\} =: B_p$ и так называемый факториальный базис $\{1,t,t(t-1),\ldots,(t)_n,\ldots\} =: B_f$. Тогда матрицы S и s, составленные из чисел Стирлинга второго и первого рода, являются матрицами перехода от одного базиса к другому:

$$B_f = s\cdot B_p, \qquad B_p = S\cdot B_f, \qquad s\cdot S = S\cdot s = I,$$

где I — единичная матрица.

6.3. Вернемся к композиционной формуле и, по аналогии с задачей о разбиении n-множества на блоки, рассмотрим третий случай, когда

$$b_k = t^k, \qquad a_n = (n-1)!\cdot x_n.$$

6.3.1. Действия, совершенно аналогичные описанным в задаче о разбиении n-множества на блоки, приведут нас к разложению вида

$$C(z,t) = G(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k C_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})\right)\frac{z^n}{n!}, \tag{18}$$

в котором полиномы $C_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1})$ рассчитываются по формулам

$$C_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1}) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k\\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_{n-k+1}!}\Big(\frac{x_1}{1}\Big)^{k_1}\ldots\Big(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)}\Big)^{k_{n-k+1}}. \quad (19)$$

Комбинаторный смысл этих полиномов следующий: коэффициенты при $x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_{n-k+1}^{k_{n-k+1}}$ есть количество перестановок n-множества, имеющих ровно k циклов, в которых имеются k_1 циклов единичной длины, k_2 циклов длины два и т.д.

Выбирая тем или иным способом значения переменных $x_1,\ldots,x_n$, мы можем сразу записывать решения большого количества задач, связанных с комбинаторикой перестановок. Так, полагая в формулах (19) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, мы получаем явную формулу для вычисления чисел Стирлинга первого рода:

$$c(n,k) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_{n-k+1}=k\\ 1\cdot k_1+\ldots+(n-k+1)\cdot k_{n-k+1}=n}} \frac{n!}{k_1!\ldots k_{n-k+1}!}\cdot\frac{1}{(1)^{k_1}(2)^{k_2}\ldots(n-k+1)^{k_{n-k+1}}}.$$

6.3.2. Во многих комбинаторных задачах общее количество k циклов фиксировать не нужно. Для таких случаев мы вместо разложения (18) получаем ряд вида

$$C(z) = G(F(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} Z_n(x_1,\ldots,x_n)\, z^n.$$

Коэффициент

$$\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(x_1,\ldots,x_{n-k+1}) \quad (20)$$

этого ряда называется дополненным цикловым индексом, а коэффициент

$$Z_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n). \quad (21)$$

цикловым индексом множества всех перестановок n-элементного множества.

Например,

$$\widetilde{Z}_1(x_1) = x_1,$$
$$\widetilde{Z}_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2,$$
$$\widetilde{Z}_3(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3,$$
$$\widetilde{Z}_4(x_1,\ldots,x_4) = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4.$$

Третье равенство, в частности, означает, что множество всех перестановок 3-элементного множества содержит единственный цикл, содержащий 3 перестановки единичной длины (тождественная перестановка $(1)(2)(3)$), три перестановки, содержащие один цикл единичной длины и один двойной цикл (перестановки $(1\,2)(3)$, $(1\,3)(2)$, $(2\,3)(1)$), а также две перестановки, имеющие единственный цикл длины три (перестановки $(1\,2\,3)$ и $(1\,3\,2)$).

6.3.3. Помимо явных формул, полезно также иметь рекуррентные формулы для вычисления цикловых индексов. Для их получения воспользуемся равенством

$$C(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\widetilde{Z}_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{z^n}{n!} = \exp\Big(x_1\frac{z}{1!} + x_2\frac{z^2}{2!} + \ldots + x_n\frac{z^n}{n!} + \ldots\Big).$$

Продифференцируем обе части этого равенства по z. В левой части равенства получим

$$C'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{Z}_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{Z}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \frac{z^n}{n!} =$$

В правой части имеем

$$C(z) \cdot \left[x_1 + x_2 z + x_3 z^2 + \ldots + x_n z^{n-1} + \ldots\right] =$$

$$= \left[\widetilde{Z}_0 + \widetilde{Z}_1(x_1)\frac{z}{1!} + \widetilde{Z}_2(x_1, x_2)\frac{z^2}{2!} + \ldots + \widetilde{Z}_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{z^n}{n!} + \ldots\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 \frac{z}{1!} + \widetilde{x}_3 \frac{z^2}{2!} + \ldots + \widetilde{x}_n \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\right], \qquad \text{где} \quad \widetilde{x}_{k+1} = x_{k+1} \cdot k!$$

Перемножая эти две экспоненциальные производящие функции, получаем, что

$$\widetilde{Z}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{x}_{k+1} \binom{n}{k} \widetilde{Z}_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}),$$

или

$$\widetilde{Z}_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (n)_k x_{k+1} \widetilde{Z}_{n-k}(x_1, \ldots, x_{n-k}).$$

Так, например,

$$\widetilde{Z}_5 = x_1 \widetilde{Z}_4 + 4x_2 \widetilde{Z}_3 + 12x_3 \widetilde{Z}_2 + 24x_4 \widetilde{Z}_1 + 24x_5 \widetilde{Z}_0 =$$

$$= x_1(x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 8x_1 x_3 + 6x_4) + 4x_2(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3) + 12x_3(x_1^2 + x_2) + 24x_4 x_1 + 24x_5 =$$

$$= x_1^5 + 10x_1^3 x_2 + 15x_1 x_2^2 + 20x_1^2 x_3 + 20x_2 x_3 + 30x_1 x_4 + 24x_5.$$

6.4. Как уже было отмечено выше, с помощью цикловых индексов (20) и (21), а также с помощью производящей функции $C(z,t)$ можно решать огромное количество комбинаторных задач, связанных с перестановками n-элементного множества. В качестве характерного примера рассмотрим задачи, связанные с подсчетом перестановок, в которых отсутствуют единичные циклы.

6.4.1. Эта задача в простейшей ее постановке уже рассматривалась в первом параграфе третьей главы — там мы ввели количество D_n перестановок без неподвижных точек, нашли для чисел D_n экспоненциальную производящую функцию, а затем с ее помощью получили явное выражение для этих чисел. С точки зрения композиции производящих функций числа D_n являются аналогами чисел Белла B_n в задаче о разбиении n-множества на блоки, а также факториальных чисел $n!$ в задаче о подсчете всех перестановок.

Здесь же мы рассмотрим несколько более сложную задачу определения количества $d(n,k)$ перестановок, не содержащих циклов единичной длины и состоящих ровно из k циклов. Числа $d(n,k)$ с точки зрения описываемого в настоящем параграфе подхода являются аналогами чисел Стирлинга второго рода $S(n,k)$ в задаче о разбиении n-множества ровно на k блоков, а также чисел Стирлинга первого рода $c(n,k)$ в задаче о подсчете количества всех перестановок, имеющих ровно k циклов. Как следствие, числа $d(n,k)$ носят название присоединенных чисел Стирлинга первого рода.

Из рассуждений, проведенных в предыдущем пункте, следует, что рассматриваемой задаче отвечают следующие значения переменных $x_1, \ldots, x_n$ в формулах (18)–(21):

$$x_1 = 0, \qquad\qquad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1.$$

Действительно, равенство $x_1 = 0$ означает, что нам запрещено выбирать перестановки, содержащие циклы длины 1, а равенства $x_2 = \ldots = x_n = 1$ означают, что мы имеем право выбирать любые циклы длины, большей единицы. Следовательно,

$$d(n,k) = C_{n,k}(0,1,\ldots,1),$$

а экспоненциальная производящая функция для этих чисел

$$D(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Bigl(\sum_{k=0}^{n} d(n,k)\,t^k\Bigr)\frac{z^n}{n!} = \exp\Bigl[t\cdot\Bigl(0\cdot z + 1\cdot\frac{z^2}{2} + \ldots + 1\cdot\frac{z^n}{n} + \ldots\Bigr)\Bigr] \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad D(z,t) = \exp\Bigl[t\Bigl(\ln\frac{1}{1-z} - z\Bigr)\Bigr] = \frac{e^{-tz}}{(1-z)^t}. \tag{22}$$

6.4.2. Сравнивая формулы (14) и (22), мы видим, что экспоненциальные производящие функции для чисел $c(n,k)$ и $d(n,k)$ связаны соотношением вида

$$C(z,t) = e^{tz}\cdot D(z,t) \qquad \Longrightarrow \qquad c(n,k) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} d(n-i,k-i).$$

Последнее равенство имеет следующий достаточно очевидный комбинаторный смысл: количество $c(n,k)$ способов получить перестановку, содержащую ровно k циклов, равно количеству способов разбить n-множество на два блока размерами i и $(n-i)$, единственным способом построить в первом блоке i циклов единичной длины, а во втором блоке $d(n-i,k-i)$ способами построить перестановку $(n-i)$-элементного множества, содержащую $(k-i)$ циклов, длина каждого из которых больше или равна двум.

6.4.3. Используя производящую функцию $d(z,t)$, достаточно просто получить рекуррентные соотношения для чисел $d(n,k)$. Действительно, продифференцируем равенство (22) по z:

$$\frac{\partial d}{\partial z} = \frac{tz}{1-z}d(z,t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}(t)\frac{z^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} t d_n(t)\frac{z^{n+1}}{n!} \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}(t)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} n d_n(t)\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} n t d_{n-1}(t)\frac{z^n}{n!} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad d_{n+1}(t) = n\cdot d_n(t) + n\cdot t\cdot d_{n-1}(t), \qquad n = 1,2,\ldots; \quad d_0(t) = 1, \quad d_1(t) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad d(n+1,k) = n\cdot d(n,k) + n\cdot d(n-1,k-1), \qquad k = 1,\ldots,n; \quad n = 1,2,\ldots;$$

$$d(0,0) = 1, \quad d(n,n) = d(n,0) = 0 \ \forall\, n > 0.$$

6.4.4. Заметим, что количество D_n всех перестановок без неподвижных точек выражается через $d(n,k)$ по очевидным формулам

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = d_n(1).$$

Как следствие, рекуррентное соотношение для этих чисел имеет вид

$$D_{n+1} = n[D_n + D_{n-1}], \qquad n \geqslant 1; \qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0,$$

а производящая функция записывается в виде

$$D(z) = D(z, 1) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Из последней формулы, в частности, сразу же следует явное выражение для чисел D_n:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n!\Big[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big].$$

Упражнения

6.1. Еще одним обобщением задачи о беспорядках является задача о поиске количества $D(n, k)$ перестановок, в которых ровно k элементов остаются на своих местах, а $(n-k)$ элементов меняют свое положение. Доказать, что

$$D(n, k) = \binom{n}{k} \cdot D_{n-k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Построить производящую функцию $D(z, t)$ для этих чисел.

6.2. Построить производящую функцию для всех перестановок, r-я степень которых есть тождественная перестановка id:

$$\pi^r = id.$$

Рассмотреть два частных случая этой ситуации — инволюции, то есть перестановки вида $\pi^2 = id$, а также инволюции без неподвижных точек, то есть инволюции, не содержащие циклов длины 1. Показать, что количество инволюций без неподвижных точек равно $1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) =: (2n-1)!!$.

6.3. Доказать, что производящая функция, описывающая количество перестановок с циклами нечетной длины, имеет вид

$$G_{odd} = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Получить с ее помощью явные выражения для числа таких перестановок.