ML 32. Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;

б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

ML 33. Приведите пример формулы, которая истинна во всех интерпретациях с конечным носителем, но не является общезначимой.

ML 34. Докажите общезначимость следующих формул при помощи алгоритма расказаного на лекции (перейти к отрицанию, привести к предваренной форме применить сколемизацию и воспользоваться теоремой Эрбрана):

а) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$;

б) $\forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \exists x\, P(x,y)$;

в) $(\exists x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$;

г) $(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to (\exists x\, (P(x) \to Q(x)))$;

д) $\exists x\, (A(c,x) \to A(x,d))$.

ML 35. Докажите корректность секвенциального исчисления.

ML 36. Покажите, что следующие формулы выводимы в исчислении секвенций (формула φ выводима, если выводима $\vdash \varphi$):

а) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$;

б) $\forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall y\, \exists x\, P(x,y)$;

в) $(\exists x\, (P(x) \to Q(x))) \to (\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$;

г) $(\forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)) \to (\exists x\, (P(x) \to Q(x)))$;

д) $\exists x\, (A(c,x) \to A(x,d))$.

ML 22. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right], \dots, \left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 28. Докажите, что для любой вычислимой функции f в любой главной нумерации (главной универсальной функции) $V(n,x)$ существует бесконечное число номеров n, что для любого x выполнено, что $V(n,x) = f(x)$ (при чем $V(n,x)$ не определенно тогда и только тогда, когда $f(x)$ не определена).

ML 29. Покажите, что существуют универсальная вычислимая функция, которая не является главной.

ML 30. Пусть $H = \{(n,x) \mid {<}n{>}(x) \text{ останавливается}\}$. Покажите, что $H \in \Sigma_1$ и любое множество из Σ_1 m-сводится к H.

ML 31. Покажите, что множество номеров алгоритмов, которые не останавливаются ни на одном входе

а) лежит в классе Π_1;

б) любое другое множество из Π_1 m-сводится к этому множеству;

в) покажите, что это множество не лежит в Σ_1.