Домашнее задание 4. Рекуррентные соотношения.

Группа 102/3

Количество задач на зачёт: 6 (пункты в первой учитываются как отдельные задачи)

1. Решить следующие линейные однородные рекуррентные соотношения второго порядка:
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n, \qquad a_0 = 2, \quad a_1 = 6;$$
$$a_{n+2} = 2\sqrt{2}a_{n+1} - 4a_n, \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

2. Построить общее решение рекуррентного соотношения
$$a_{n+5} = -5a_{n+4} + 81a_{n+1} + 405a_n.$$

3. Построить общее решение неоднородного рекуррентного соотношения второго порядка
$$a_{n+2} = 5\,a_{n+1} - 6\,a_n + 6 \cdot 3^n.$$

4. Мы положили тысячу рублей в банк под пять процентов годовых. В начале каждого года мы докладываем пятьсот рублей на счет. Сколько денег будет на счете через n лет?

5. На плоскости нарисованы n окружностей так, что любая пара окружностей пересекается ровно по двум точкам, и никакие три окружности не имеют общей точки пересечения. Определить количество a_n областей, на которые разбивается плоскость такими окружностями.

6. Рассмотрим плоскость (x, y). Предположим, что мы можем ходить по плоскости, делая шаг вверх (U), шаг вправо (R) и шаг влево (L) на единицу длины так, чтобы шаг R никогда не следовал за шагом L и наоборот. Подсчитать количество a_n таких путей после n шагов.

7. Пути Моцкина длины n – это пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n, 0)$, состоящие из шагов $(1, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, -1)$ и не опускающиеся ниже оси абсцисс. Напишите реккурентную формулу для количества таких путей, задайте начальные значения данной последовательности.

8. Фигура «целеустремлённый король» ходит только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо-вверх. Любитель необычных шахмат на необычных досках поставил целеустремленного короля в левый нижний угол пустой доски размера $n \times n$ и хочет провести короля в верхний правый угол так, чтобы он не поднимался выше диагонали доски, соединяющей эти две клетки. Задайте рекуррентно последовательность S_n, описывающую количество способов это сделать.