Нижние оценки на хроматическое число. Теорема Турана. Совершенные графы

Домашнее задание №13

8 декабря 2017 г.

Обязательная часть

1. (2 балла). Доказать, что в случае выполнения неравенства
$$\sum_{x \in V(G)} \binom{\deg(x)}{2} > (l-1)\binom{n}{2}$$
построенный на n вершинах граф G содержит $K_{2,l}$ в качестве своего подграфа.

2. (1 балл). Предположим, что верно следующее утверждение: граф G является совершенным тогда и только тогда, когда для любого индуцированного подграфа H графа G выполняется неравенство
$$|V(H)| \leqslant \alpha(H) \cdot \omega(H).$$
Доказать, что из этого утверждения следует теорема о совершенном графе.

3. (1 балл). Доказать, что любой двудольный граф $G[X, Y]$ является совершенным графом, с помощью теоремы о совершенных графах.

4. (1.5 балла). Доказать, что дополнение к двудольному графу является совершенным графом.

5. (1.5 балла). Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Доказать, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.

6. (1.5 балла). Рассмотрим n замкнутых интервалов $I_1, I_2, \ldots, I_n$ на вещественной оси (рис.1). Построим для этих интервалов граф G на n вершинах $x_1, \ldots, x_n$, соединяя вершины x_i и x_j ребром в том и только в том случае, когда пересечение $I_i \cap I_j \neq \varnothing$. Такой граф G называется *интервальным* графом. Доказать, что интервальный граф является совершенным, то есть что $\chi(G) = \omega(G)$.

7. (1.5 балла). *Графом сравнимости* (comparability graph) называют граф G, связанный с некоторым частично упорядоченным множеством $(P, \preccurlyeq)$. Множество вершин графа G совпадает с множеством P элементов частично упорядоченного множества. Если два элемента $x, y \in P$, $x \neq y$, сравнимы между собой (то есть $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$), то соответствующие этим элементам вершины x, y графа G соединены между собой ребром.

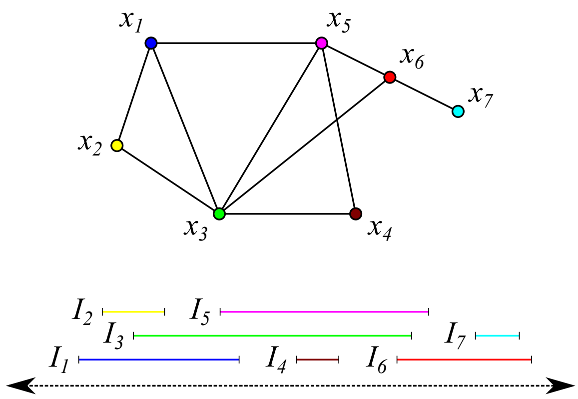

Рис. 1: Интервальный граф

По другому этот граф можно определить следующим образом. *Транзитивной ориентацией* графа G называется такая ориентация D ребер этого графа, при которой для любых ориентированных ребер $(x, y) \in E(D)$ и $(y, z) \in E(D)$ найдется ориентированное ребро $(x, z) \in D$. В этих терминах граф G называется графом сравнимости, если в нем существует транзитивная ориентация.

Доказать, что граф сравнимости является совершенным графом, как с помощью теоремы Мирского, так и без нее. Показать эквивалентность теоремы Мирского утверждению о том, что граф сравнимости совершенен.

8. (1 балл). Доказать теорему Дилуорса для частично упорядоченного множества $(P, \preccurlyeq)$ с помощью теоремы о совершенном графе.