

Домашнее задание №2 по математическому анализу
28.02.15, бакалавриат АУ, информатики

1. Вычислите $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

2. Найдите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \sqrt{k(n-k)}$.

3. Докажите, что константа Эйлера $\gamma = \lim(1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n)$ может быть выражена интегралом

$$\gamma = - \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx.$$

4. Найдите предел

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

5. Докажите, что если $f(t)$ — выпуклая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $g(t)$ — такая интегрируемая неотрицательная функция, что $\int_a^b g(t) dt = 1$, то $\int_a^b g(t) f(t) dt \geq f(\int_a^b t g(t) dt)$.